1

ACTIVIDADES RESUELTAS

NÚMEROS REALES

1. Indica cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles irracionales:

   a) $\frac{5}{6}$ b) 6,345345… c) $-\sqrt{121}$ d) 7,23041… e) 3,141

   RESOLUCIÓN:

   $\frac{5}{6}$ es una fracción. Por tanto es racional ya que número racional es el que puede expresarse como fracción.

   6,345345… es periódico puro y puede expresarse como: $\frac{6345-6}{999}=\frac{6339}{999}=\frac{2113}{333}$ y por tanto es racional

   $-\sqrt{121}=-11$, que es un número entero y, por tanto, racional.

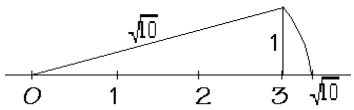
   7,23041… no muestra una regla de formación de las cifras decimales; se supone que no la hay y contiene infinitas cifras decimales sin periodicidad. Por tanto, es irracional.

   3,141 es decimal exacto que puede expresarse: $\frac{3141}{1000}$, por tanto es racional.

2. Representa gráficamente $\sqrt{10}$.

   RESOLUCIÓN:

   Aplicaremos el teorema de Pitágoras. Así que buscamos un triángulo rectángulo cuyos catetos elevados al cuadrado sumen 10. Así, si $b = 3$ y $c = 1$, $a=\sqrt{10}$



3. Encuentra, si es posible, dos números racionales entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$.

   RESOLUCIÓN:

   Manejaremos el concepto de media aritmética: es el número que está en medio. Por tanto, $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{7}\right)=\frac{7}{10}$ es un número racional comprendido entre los que nos dan. Ahora podemos volver a seguir el mismo procedimiento con $\frac{3}{5}$ y $\frac{7}{10}$.

   Otro método consiste en expresar las fracciones dadas de manera equivalente con un denominador más grande. Así, $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{12}{20}$, y $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}=\frac{16}{20}$. De manera que $\frac{13}{20}$, $\frac{14}{20}$ y $\frac{15}{20}$ son racionales que cumplen lo que nos piden

4. ¿Qué números reales cumplen $-x+7 \leq 0'5$?

   RESOLUCIÓN: $-x + 7 \leq 0{,}5 \Leftrightarrow -x + 7 - 7 \leq 0{,}5 - 7 \Leftrightarrow -x \leq -6{,}5 \Leftrightarrow x \geq 6{,}5 \Leftrightarrow x \in [6{,}5, +\infty)$

5. Se verifica que $a + b > 3$ y $a - b < 3$. Entonces, ¿cuál de los dos es mayor, a o b?

   RESOLUCIÓN:

   No puede afirmarse nada al respecto: $a = 3; b = 1; a > b$ $\quad a + b = 4 > 3$ $\quad a - b = 2 < 3$

   $a = 1;\ b = 3; a < b$ $\quad a + b = 4 > 3$ $\quad a - b = -2 < 3$

6. ¿Qué números reales distan 5 unidades de 2/5?

   RESOLUCIÓN:
   $$\left|x-\frac{2}{5}\right|=5 \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{2}{5}=5 \Leftrightarrow x=5+\frac{2}{5} \Leftrightarrow x=\frac{27}{5} \\ x-\frac{2}{5}=-5 \Leftrightarrow x=-5+\frac{2}{5} \Leftrightarrow x=-\frac{23}{5} \end{cases}$$

7. Calcula $\sqrt{2}$ con dos decimales. Acota el error absoluto y el relativo.

   RESOLUCIÓN:

   La calculadora nos proporciona: $\sqrt{2} = 1{,}4142…$. Si tomamos dos decimales: $\sqrt{2} \cong 1{,}41$.

El error absoluto es E = |1,4142… – 1,41| = 0,0042…. < 0,0043 < 0,005 = $5\cdot 10^{-3}$.

El error relativo $\varepsilon = \frac{E}{\sqrt{2}} < \frac{0,0043}{1,41} \cong 0,003 \rightarrow 0,3\ \%$

8. Expresa los siguientes radicales de manera que tengan el mismo índice: $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[5]{5}$

RESOLUCIÓN:

m.c.m. (2, 3, 5) = 30. Colocamos este valor como nuevo índice de las raíces, y como exponente del radicando, el número que resulta de dividirlo entre el índice antiguo:

$\sqrt{2} = \sqrt[30]{2^{15}} = \sqrt[30]{32768}$ $\quad \sqrt[3]{3} = \sqrt[30]{3^{10}} = \sqrt[30]{59049}$ $\quad \sqrt[5]{5} = \sqrt[30]{5^{6}} = \sqrt[30]{15625}$

9. ¿Qué podemos decir de la expresión $\sqrt[3]{8} = \sqrt{4}$?

RESOLUCIÓN:

Hay que tener en cuenta que $\sqrt[3]{8}$ sólo tiene el valor real 2. Mientras que $\sqrt{4}$ tiene dos valores reales ± 2. Por tanto la igualdad no es del todo cierta.

10. Expresa en forma de potencia los siguientes radicales: a) $\sqrt{a}$; b) $\sqrt[3]{a^2}$; c) $\sqrt[4]{81a^2}$

RESOLUCIÓN: a) $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ $\quad$ b) $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$ $\quad$ c) $\sqrt[4]{81a^2} = (81a^2)^{\frac{1}{4}} = (9a)^{\frac{2}{4}} = (9a)^{\frac{1}{2}}$

11. Expresa en forma de radicales: a) $a^{\frac{1}{3}}$ b) $625^{\frac{1}{4}}$ c) $(3a)^{\frac{1}{2}}$

RESOLUCIÓN: a) $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ $\quad$ b)$625^{\frac{1}{4}} = (5^4)^{\frac{1}{4}}$=5 $\quad$ c) $(3a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3a}$

12. Simplificar los siguientes radicales: a) $\sqrt[3]{8}$ b) $\sqrt[6]{125}$ c) $\sqrt{27x^3}$

RESOLUCIÓN: a) $\sqrt[3]{8} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2$ $\quad$ b) $\sqrt[6]{125} = (5^3)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{3}{6}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

c) $\sqrt{27x^3} = ((3x)^3)^{\frac{1}{2}} = \left((3x)^2\cdot(3x)\right)^{\frac{1}{2}} = 3x\cdot(3x)^{\frac{1}{2}} = 3x\sqrt{3x}$

13. Reduce las siguientes expresiones a la forma más simple equivalente:

a) $2\sqrt{50x^3} + 3\sqrt{18xy^4} - 3x\sqrt{2x}$ $\quad$ b) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

RESOLUCIÓN:

a) $2\sqrt{50x^3} + 3\sqrt{18xy^4} - 3x\sqrt{2x} = 2\sqrt{2\cdot 5^2\cdot x^2\cdot x} + 3\sqrt{2\cdot 3^2\cdot x\cdot y^4} - 3x\sqrt{2x} =$
$2\cdot 5\cdot x\cdot\sqrt{2x} + 3\cdot 3\cdot y^2\cdot\sqrt{2x} - 3x\sqrt{2x} = 10x\sqrt{2x} + 9y^2\sqrt{2x} - 3x\sqrt{2x} = (7x + 9y^2)\sqrt{2x}$

b) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3} = \sqrt{5}+\sqrt{2}$

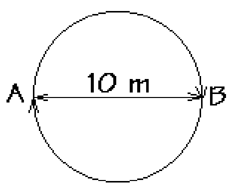
14. Halla el valor de x que hace cierta la igualdad $\sqrt{3x} - \sqrt{2x} = \sqrt{6}$

RESOLUCIÓN:

$\sqrt{3x} - \sqrt{2x} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{x} - \sqrt{2}\cdot\sqrt{x} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{x} = \sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} =$

$= \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \Leftrightarrow x = 6(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 6(5+2\sqrt{6})$

15. Dos ciclistas salen simultáneamente del punto A con la misma velocidad. El primero recorre la circunferencia y el segundo el diámetro. ¿Se encontrarán alguna vez?



RESOLUCIÓN: Suponemos que uno recorre n veces el diámetro y el otro m veces la semicircunferencia antes de encontrarse. Entonces: $n\cdot 10 = m\cdot 5\pi \rightarrow n/m = 5\pi/10 = \pi/2$. Pero n, m$\in \mathbb{N} \rightarrow n/m \in \mathbb{Q}$, y sin embargo $\pi/2$ es irracional. ¡Absurdo! Luego NO ES POSIBLE QUE SE ENCUENTREN NUNCA.

16. Si x < y, indica cuales de las siguientes desigualdades son ciertas:

a) 7 – x < 7 – y b) 3y < 3x c) $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$.

RESOLUCIÓN:

$x < y \Leftrightarrow -x > -y \Leftrightarrow$ (sumando 7 a cada miembro) $7 - x > 7 - y$ Así pues, es FALSA

$x < y \Leftrightarrow$ (multiplicando ambos miembros por 3) $3x < 3y$ Así pues, es FALSA

$x < y \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ ya que dividimos 1 por un nº más pequeño (x) Así pues, es FALSA

17. Calcula los siguientes logaritmos:

a) log1; b) log100; c) log0,001; d) log√10; e) log216; f) log3243; g) log5625; h) log7343

RESOLUCIÓN:

a) $\log 1 = x \Leftrightarrow 10^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Por tanto $\log 1 = 0$

b) $\log 100 = x \Leftrightarrow 10^x = 100 \Leftrightarrow x = 2$. Por tanto $\log 100 = 2$

c) $\log 0{,}001 = x \Leftrightarrow 10^x = 0{,}001 \Leftrightarrow x = -3 \rightarrow \log 0{,}001 = -3$

d) $\log\sqrt{10} = x \Leftrightarrow 10^x = 10^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow$) $\log\sqrt{10} = ½$

e) $\log_2 16 = x \Leftrightarrow 2^x = 16 = 2^4 \Leftrightarrow x = 4 \rightarrow \log_2 16 = 4$

f) $\log_3 243 = x \Leftrightarrow 3^x = 243 = 3^5 \Leftrightarrow x = 5 \rightarrow \log_3 243 = 5$

g) $\log_5 625 = x \Leftrightarrow 5^x = 625 = 5^4 \Leftrightarrow x = 4 \rightarrow \log_5 625 = 4$

h) $\log_7 343 = x \Leftrightarrow 7^x = 343 = 7^3 \Leftrightarrow x = 3 \rightarrow \log_7 343 = 3$

18. ¿En qué base el logaritmo de 16 es –½?

RESOLUCIÓN: $\log_x 16 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^{-\frac{1}{2}} = 16 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{16}\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{256}$

19. ¿Qué número tiene por logaritmo en base cuatro a –½?

RESOLUCIÓN: $\log_4 x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ (¡positivo!)

20. Sin calculadora, sabiendo que log2 = 0,30103 y log3 = 0,47712, calcula $\log\sqrt[5]{40}$, log40,5 y $\log 3,\hat{3}$.

RESOLUCIÓN:

$\log\sqrt[5]{40} = \frac{1}{5}\log 40 = \frac{1}{5}\log(2^2\cdot 10) = \frac{1}{5}[\log 2^2 + \log 10] = \frac{1}{5}[2\log 2 + \log 10] = \frac{1}{5}[2\cdot 0{,}30103+1] = 0{,}320412$

$\log 40{,}5 = \log\frac{81}{2} = \log 81 - \log 2 = \log 3^4 - \log 2 = 4\log 3 - \log 2 = 4\cdot 0{,}47712 + 0{,}30103 = 1{,}60745$

$\log 3,\hat{3} = \log\frac{10}{3} = \log 10 - \log 3 = 1 - 0{,}47712 = 0{,}52288$

21. Resuelve: a) $2^{3x-1} = 11$ b) $4\log\frac{x}{5} + \log\frac{25}{4} = 2\log x$ c) $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ 2^{x-y} = 2 \end{cases}$

RESOLUCIÓN:

a) $2^{3x-1} = 11 \Leftrightarrow (3x-1)\log 2 = \log 11 \Leftrightarrow 3x - 1 = \frac{\log 11}{\log 2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\left(\frac{\log 11}{\log 2} + 1\right) \Leftrightarrow x = 1{,}486477\ldots$

b) $4\log\frac{x}{5} + \log\frac{25}{4} = 2\cdot\log x \Leftrightarrow \log\left(\frac{x}{5}\right)^4 + \log\frac{25}{4} = \log x^2 \Leftrightarrow \log\left(\frac{x}{5}\right)^4\cdot\frac{25}{4} = \log x^2 \Leftrightarrow$ $\left(\frac{x}{5}\right)^4\cdot\frac{25}{4} = x^2 \Leftrightarrow \frac{25x^4}{2500} = x^2 \Leftrightarrow \frac{x^4}{100} = x^2 \Leftrightarrow \frac{x^4}{x^2} = 100 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = 10$ (no vale -10 porque x es argumento de un logaritmo y no puede ser negativo)

c) $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ 2^{x-y} = 2 \end{cases}$; $\qquad 2^{x-y} = 2 \Leftrightarrow x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1.$

Sustituimos en la 1ª ecuación: $\log x - \log(x-1) = 1 \Leftrightarrow \log\frac{x}{x-1} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} = 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 10x - 10 \Leftrightarrow 9x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{9}$. Y ahora volvemos a $y = x - 1 \rightarrow y = \frac{1}{9}$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

22. Efectúa las siguientes divisiones: a) $8x^3 : 2x^5$ b) $\sqrt{2}\cdot x^7 : 2\sqrt{2}\cdot x^7$ c) $\frac{x^4}{2} : \frac{-3x^3}{4}$

RESOLUCIÓN:

a) $8x^3 : 2x^5$ = (Operamos separadamente con los coeficientes y la parte literal) = $(8:2)(x^3:x^5)$ $= 4x^{3-5} = 4x^{-2} = \frac{4}{x^2} =$.

b) $\sqrt{2}\cdot x^7 : 2\sqrt{2}\cdot x^7$ = (Análogamente) = $(\sqrt{2} : 2\sqrt{2})\ (x^7:x^7) = ½ \cdot 1 = ½$.

c) $\frac{x^4}{2} : \frac{-3x^3}{4}$ = (Recordando la división de fracciones) $= \frac{4x^4}{-6x^3} = -\frac{2x}{3}$

23. Realiza las siguientes divisiones exactas:
a) $(x+3) : (7x+21)$ b) $(x^2 - 2x + 1) : (x - 1)$ c) $(x^4 - 4x^2) : (x + 2)$

RESOLUCIÓN:

a) $(x + 3) : (7x + 21) = (x+3):[7(x+3)] = 1/7$

b) $(x^2 - 2x + 1) : (x - 1) = (x - 1)^2 : (x - 1) = (x - 1)$

c) $(x^4 - 4x^2) : (x + 2) = x^2(x^2 - 4) : (x+2) = x^2(x + 2)(x - 2) : (x+2) = x^2(x - 2)$

24. Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios:
a) $(x^4 - 2x^3 + 1) : (x^2 - 3x + 2)$ b) $(-\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1) : (x^2 + \frac{1}{4})$

RESOLUCIÓN: Completamos los monomios que faltan en el orden decreciente de las potencias de x poniendo coeficiente 0.

a)

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & -2x^3 & +0x^2 & +0x & +1 & x^2 \ -3x \ +2 \\ \hline \end{array}$$

Colocamos los polinomios como en la división de números.

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & -2x^3 & +0x^2 & +0x & +1 & x^2 \ -3x \ +2 \\ \cline{6-6} & & & & & x^2 \end{array}$$

Tratamos cada monomio como si fuera una cifra del número. Se divide el primer monomio del dividendo por el primero del divisor.

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & -2x^3 & +0x^2 & +0x & +1 & x^2 \ -3x \ +2 \\ \cline{6-6} -x^4 & +3x^3 & -2x^2 & & & x^2 \\ \cline{1-5} & x^3 & -2x^2 & +0x & +1 & \end{array}$$

Se multiplica ahora este cociente parcial por cada uno de los monomios del divisor y se resta al dividendo.

Ahora se considera este resto parcial como nuevo dividendo y repetimos el proceso.

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & -2x^3 & +0x^2 & +0x & +1 & x^2 \ -3x \ +2 \\ \cline{6-6} -x^4 & +3x^3 & -2x^2 & & & x^2 \ +x \\ \cline{1-4} & x^3 & -2x^2 & +0x & +1 & \\ & -x^3 & +3x^2 & -2x & & \\ \cline{2-5} & & x^2 & -2x & +1 & \leftarrow \end{array}$$

Nuevo resto parcial que pasa a ser el nuevo dividendo

x^4	$-2x^3$	$+0x^2$	$+0x$	$+1$	$x^2 \ -3x \ +2$
$-x^4$	$+3x^3$	$-2x^2$			$x^2 \ +x \ +1$
	x^3	$-2x^2$	$+0x$	$+1$	
	$-x^3$	$+3x^2$	$-2x$		
		x^2	$-2x$	$+1$	
		$-x^2$	$+3x$	-2	
			x	-1	← RESTO

COCIENTE: $x^2 + x + 1$

RESTO: $x - 1$

b)

$-2x^3$	$-2x^2$	$-2x$	$+4$	$4x^2 \ +0x \ +1$
$+2x^3$	$+0x^2$	$+½\,x$		$-½\,x \ -½$
	$-2x^2$	$-3/2·x$	$+4$	
	$+2x^2$	$+0x$	$+½$	
		$-3/2·x$	$+9/2$	

Previamente multiplicamos por 4 dividendo y divisor, con lo que trabajamos con coeficientes enteros. Siguiendo el proceso antes descrito:

COCIENTE: $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

RESTO: $-\frac{3}{8}(x-3)$ (recuérdese que hemos multiplicado por 4 dividendo y divisor; ahora hay que dividir el resto)

25. Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones, utilizando la regla de Ruffini:
 a) $(x^4 - 2x^3 + x^2 + 1) : (x - 2)$ b) $(x^5 + 1) : (x + 1)$

RESOLUCIÓN: La regla de Ruffini utiliza sólo los coeficientes del polinomio dividendo 'completo'. Únicamente se aplica con divisores de la forma x – a.

a) Coeficientes del polinomio dividendo →

Número que se le resta a x en el divisor →

	+1	–2	+1	0	+1
2	↓				
	+1				

El primer coeficiente del dividendo baja al cociente directamente

	+1	–2	+1	0	+1
2	↓	2·1			
	+1				

Se multiplica el 2 por el primer elemento del cociente, y se coloca bajo el segundo término del dividendo.

	+1	–2	+1	0	+1
2	↓	+2	2·0		
	+1	0			

Se van sumando los números de la misma columna y se va repitiendo el proceso.

	+1	–2	+1	0	+1
2	↓	+2	0	+2	+4
	+1	0	+1	+2	+5
	$·x^3$	$·x^2$	$·x$	·1	←

Este último número (sombreado)es el resto de la división

Los demás números son los coeficientes del polinomio cociente, que será un grado inferior que el dividendo.

Por tanto: COCIENTE: $x^3 + x + 2$ y RESTO: 5

b) Como se aplica el proceso para divisores de la forma $x - a$, ahora $a = -1$

	+1	0	0	0	0	+1
–1	↓	–1	+1	–1	+1	–1
	+1	–1	+1	–1	+1	0

RESTO = 0 ⇒ División exacta

COCIENTE: $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

26. Calcula el resto sin hacer la división: a) $(x^4 - 2x^2 + x + 1) : (x + 2)$ b) $(\sqrt{2}x^4 - \sqrt{2}) : (x - \sqrt{2})$

RESOLUCIÓN:

a) $P(x) = x^4 - 2x^2 + x + 1$; $P(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^2 + (-2) + 1 = 7$.
 Por el teorema del resto, RESTO = 7

b) $P(x) = \sqrt{2}x^4 - \sqrt{2}$; $P(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\,(\sqrt{2})^4 - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.
 Por el teorema del resto, RESTO = $3\sqrt{2}$

27. Averigua si –1 es un cero de $x^6 – x^5 – x^4 – x^3 – x^2 – x – 1$.

RESOLUCIÓN:

$P(x) = x^6 – x^5 – x^4 – x^3 – x^2 – x – 1$. Podemos resolver de dos maneras:

I) $P(–1) = (–1)^6 – (–1)^5 – (–1)^4 – (–1)^3 – (–1)^2 – (–1) – 1 = 1 \Rightarrow$ No es un cero de $P(x)$

II) Aplicando la regla de Ruffini para dividir $P(x) : (x+1)$, se observa que el resto da $1 \neq 0$.

28. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $2x^3 – 3x^2 – 8x + 12$ b) $x^4 –2x^3 +2x – 1$ c) $x^4 – 5x^2 + 4$ d) $x^5 – 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 – 6x$

RESOLUCIÓN: Aplicamos sucesivamente la regla de Ruffini para buscar los ceros de cada polinomio. Si hay raíces enteras, éstas deben ser divisores del término independiente; las raíces fraccionarias deben tener numerador divisor del término independiente y el denominador divisor del coeficiente líder.

a) $2x^3 – 3x^2 – 8x + 12$ Las posibles raíces enteras son los divisores de 12: ±1; ±2; ±3; ±4; ±6; ±12. Vamos probando:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -3 & -8 & 12 \\ +1 & & 2 & -1 & -9 \\ \hline & 2 & -1 & -9 & \boxed{3} \end{array}$$

Resto distinto de 0: +1 no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -3 & -8 & 12 \\ -1 & & -2 & 5 & 3 \\ \hline & 2 & -5 & -3 & \boxed{15} \end{array}$$

$\neq 0 \Rightarrow –1$ no es raíz

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -3 & -8 & 12 \\ +2 & & 4 & 2 & -12 \\ \hline & 2 & 1 & -6 & \boxed{0} \\ +2 & & 4 & 10 & \\ \hline & 2 & 5 & \boxed{4} & \end{array}$$

$\Rightarrow +2$ es raíz. Proseguimos investigando sin tener en cuenta las candidatas ya desechadas.

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & 1 & -6 \\ -2 & & -4 & 6 \\ \hline & 2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow –2$ es otra raíz, y el último factor es $2x – 3$

Por tanto: $2x^3 – 3x^2 – 8x + 12 = (2x – 3)\cdot(x – 2)\cdot(x + 2)$

b) $x^4 – 2x^3 + 2x – 1$.

Posibles raíces enteras (divisores de 1): ±1.

Vamos probando:

$$\begin{array}{r|rrrrl} & 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 1 & \boxed{0} \leftarrow \text{1 es raíz} \\ 1 & & 1 & 0 & -1 & \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \boxed{0} \leftarrow \text{1 es raíz doble} & \\ 1 & & 1 & 1 & & \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{0} \leftarrow \text{1 es raíz triple} & & \\ & x & +1 & & & \end{array}$$

Por tanto: $x^4 – 2x^3 + 2x – 1= (x + 1)\cdot(x – 1)^3$

c) $x^4 – 5x^2 + 4$.

Posibles raíces: ±1; ±2; ±4

$$\begin{array}{r|rrrrl} & 1 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ 1 & & 1 & 1 & -4 & -4 \\ \hline & 1 & 1 & -4 & -4 & \boxed{0} \leftarrow \text{1 es raíz} \\ 1 & & 1 & 2 & -2 & \\ \hline & 1 & 2 & -2 & \boxed{-6} \leftarrow \text{1 es raíz simple} & \\ & 1 & 1 & -4 & -4 & \\ -1 & & -1 & 0 & 4 & \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \leftarrow \text{–1 es raíz} & \\ -1 & & -1 & 1 & & \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{-3} \ \text{–1 es raíz simple} & & \\ & 1 & 0 & -4 & & \\ 2 & & 2 & 4 & & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} \leftarrow \text{2 es raíz} & & \end{array}$$

$x^4 – 5x^2 + 4 = (x–1)(x+1)(x–2)(x+2)$

d) $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x$

Como el término independiente es 0, un factor es x:

$x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x = x(x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6)$

Las restantes raíces las buscamos entre los divisores de 6: ±1; ±2; ±3; ±6. Obtenemos entonces:

$x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x = x(x-1)(x+1)(x-2)(x-3)$

	1	–5	5	5	–6	
1		1	–4	1	6	
	1	–4	1	6	0	← 1 es raíz
–1		–1	5	–6		
	1	–5	6	0		← –1 es raíz
2		2	–6			
	1	–3	0			← 2 es raíz

El factor que queda es x – 3

29. Calcula el m.c.d. y m.c.m. de los polinomios:
a) $x^4 - x^2$ y $x^3 - 2x^2 + x$ b) $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12$ y $x^4 - 8x^2 + 16$

RESOLUCIÓN: Recordemos que, una vez factorizados los polinomios, el m.c.d. se forma con los factores comunes afectados con el menor exponente y el m.c.m. con los comunes y no comunes afectados del mayor exponente (igual que con los números).

a) $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x+1)(x-1)$ $x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$

m.c.d. $= x(x-1)$ m.c.m. $= x^2(x+1)(x-1)^2$

b) $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x+2)(2x-3)$ $x^4 - 8x^2 + 16 = (x+2)^2(x-2)^2$

m.c.d. $= (x-2)(x+2)$ m.c.m. $= (x-2)^2(x+2)^2(2x-3)$

30. Dadas las fracciones algebraicas $A = \frac{x}{x^2-1}$; $B = \frac{x-2}{x^2-x}$ y $C = \frac{x^2+4x+4}{x^2+x}$, calcula $\frac{A-B}{C}$

RESOLUCIÓN: Procedemos como con las fracciones ordinarias. Para sumar fracciones debemos reducirlas a común denominador. Este común denominador será el m.c.m. de los denominadores de los sumandos:

$$A - B = \frac{x}{x^2-1} - \frac{x-2}{x^2-x} = \frac{x}{(x+1)(x-1)} - \frac{x-2}{x(x-1)} = \frac{x^2}{x(x+1)(x-1)} - \frac{(x+1)(x-2)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{x^2-(x^2-x-2)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{x+2}{x(x^2-1)}$$

$$\frac{A-B}{C} = \frac{x+2}{x(x^2-1)} : \frac{x^2+4x+4}{x^2+x} = (Multiplicamos\ en\ cruz) = \frac{(x+2)(x^2+x)}{x(x^2-1)(x^2+4x+4)} = (factorizamos) =$$

$$\frac{(x+2)x(x+1)}{x(x+1)(x-1)(x+2)^2} = (simplificamos\ cancelando\ factores\ comunes) = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x^2+x-2}$$

31. Se sabe que el polinomio $p(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36$ tiene raíz cuadrada exacta. Hállala.

RESOLUCIÓN: Por ser p(x) un polinomio de grado 4, su raíz cuadrada habrá de ser de grado 2, y como el coeficiente líder de p(x) es 1, el de su raíz cuadrada también. Sea q(x) dicha raíz cuadrada: $q(x) = x^2 + ax + b$. Debe ser $[q(x)]^2 = p(x)$:

$$[q(x)]^2 = (x^2 + ax + b)^2 = x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2b)x^2 + 2abx + b^2 = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36 = p(x).$$

Identificamos coeficientes: Coeficientes de x^3: $2a = -2 \rightarrow a = -1$; Coeficientes de x: $2ab = 12 \rightarrow -2b = 12 \rightarrow b = -6$. Veamos si con estos valores también se cumple la igualdad de los otros coeficientes: coeficientes de x^2: $a^2+2b = (-1)^2 + 2(-6) = -11$ (SI); términos independientes: $b^2 = (-6)^2 = 36$ (SI).

Por tanto: $q(x) = x^2 - x - 6$ es la raíz cuadrada exacta de p(x).

32. Descompón la fracción $\frac{x^2-x+2}{x^3-3x^2+2x}$ en suma de tres fracciones con denominadores de primer grado.

RESOLUCIÓN: $\frac{x^2-x+2}{x^3-3x^2+2x}$ = (factorizamos el denominador) $= \frac{x^2-x+2}{x(x-1)(x-2)}$.

Cada uno de estos factores serán los denominadores de cada sumando:

$$\frac{x^2-x+2}{x^3-3x^2+2x} = \frac{x^2-x+2}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} = \text{(Sumamos estas fracciones)} =$$

$$= \frac{A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B+C)x^2-(3A+2B+C)x+2A}{x^3-3x^2+2x}.$$

Identificamos coeficientes de los numeradores de las fracciones primera y última de esta cadena de igualdades: $\begin{cases} A+B+C=1 \\ 3A+2B+C=1 \\ 2A=2 \end{cases}$. Resolvemos este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y obtenemos: A = 1; B = −2; C = 2. Por tanto: $\frac{x^2-x+2}{x^3-3x^2+2x}=\frac{1}{x}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x-2}$

ECUACIONES E INECUACIONES

33. Resuelve las ecuaciones:

a) $4x^2 - 2 = 0$ b) $x^2 + 1 = 0$ c) $x^2 + 9 = 0$ d) $x^2 - 3x = 0$

e) $x^2 = \frac{3}{4}x$ f) $x^2 - 3x + 2 = 0$ g) $4x^2 + 12x - 7 = 0$ h) $x^2 + x + 1 = 0$

RESOLUCIÓN:

a) $4x^2 - 2 = 0$. Ecuación incompleta. Se despeja x^2: $4x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = ½ \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $x^2 + 1 = 0$. Análoga a la anterior: $x^2 = -1$. Aquí nos encontramos con un caso especial. Esta ecuación no tiene solución real, ya que un número al cuadrado no puede ser negativo. Para 'forzar' la solución, despejamos x como habitualmente haríamos: $x = \sqrt{-1}$. Este número se llama unidad imaginaria, y lo representamos por i. De modo que la ecuación tiene por soluciones $\pm i$.

c) $x^2 + 9 = 0$. De manera análoga al caso anterior: $x = \sqrt{-9} = \sqrt{9\cdot(-1)} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{-1} = \pm 3i$

d) $x^2 - 3x = 0$. Ecuación incompleta sin término independiente. Sacamos factor común de x: $x(x - 3) = 0$. Y ahora observamos que el producto de dos cantidades sólo puede ser cero si alguna de ellas es cero: $\begin{cases} x=0 \\ x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \end{cases}$. Este tipo de ecuaciones siempre tiene una solución cero.

e) $x^2 = \frac{3}{4}x$. Si pasamos 'todo' al primer miembro de la ecuación, resulta una ecuación similar a la del caso anterior. También podemos razonar diciendo que si $x \neq 0$, podemos dividir ambos miembros por x, resultando x = ¾. Así pues ya tenemos las dos soluciones: x = 0 y x = ¾.

f) $x^2 - 3x + 2 = 0$. Ecuación completa. Utilizamos la fórmula de resolución: $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, donde a = 1, b = −3 y c = 2.

Sustituimos estos valores en la fórmula: $x = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1} = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm1}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$.

g) $4x^2 + 12x - 7 = 0$. Actuamos de manera análoga al caso anterior: $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\cdot4\cdot(-7)}}{2\cdot4} = \frac{-12\pm\sqrt{256}}{8} = \frac{-12\pm16}{8} = \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{7}{2} \end{cases}$

h) $x^2 + x + 1 = 0$. $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$. La raíz cuadrada de un número negativo no existe en el conjunto de los números reales. Pero ya hemos dado salida a esta cuestión utilizando la unidad imaginaria, de manera que las dos soluciones *complejas* de esta ecuación son: $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. O sea: $x_1 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $x_2 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

34. Resuelve las ecuaciones: a) $\frac{x^2-1}{4}-\frac{x+1}{2}=\frac{x+3}{2}-x$ b) $2x^2-\frac{x^2-x+1}{2}=\frac{1}{4}-x$

RESOLUCIÓN:

a) Para obtener otra ecuación equivalente sin denominadores, multiplicamos todo por el m.c.m.(4, 2) = 4: $4\cdot\frac{x^2-1}{4}-4\cdot\frac{x+1}{2}=4\cdot\frac{x+3}{2}-4\cdot x \Leftrightarrow x^2-1-2(x+1)=2(x+3)-4x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 - 2x - 2 = 2x + 6 - 4x \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x_1 = +3$ y $x_2 = -3$

b) Multiplicamos toda la ecuación por 4: $4 \cdot 2x^2 - 4 \cdot \frac{x^2-x+1}{2} = 4 \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x^2 - 2(x^2 - x + 1) = 1 - 4x \Leftrightarrow$ (Realizamos las operaciones y pasamos todo al primer miembro) $6x^2 + 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow$ (Dividimos todo por 3) $2x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

35. Sin necesidad de resolver las siguientes ecuaciones, indica el número de soluciones reales que tienen: a) $4x^2 - 4x + 1 = 0$; b) $x^2 + x + 2 = 0$; c) $x^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{3} = 0$

RESOLUCIÓN:

a) $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)\cdot 2 - 4\cdot 4\cdot 1 = 16 - 16 = 0 \rightarrow$ Una solución REAL doble

b) $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = 1 - 8 = -7 < 0 \rightarrow$ NO hay solución REAL (Dos soluciones COMPLEJAS)

c) $\Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{2})2 - 4\cdot 1\cdot(-\sqrt{3}) = 2 + 4\sqrt{3} > 0 \rightarrow$ Dos soluciones REALES distintas.

36. Sabiendo que la ecuación $25x^2 + kx + 4 = 0$ tiene una raíz doble, averigua el valor de k

RESOLUCIÓN: El discriminante ha de ser nulo:

$\Delta = b^2 - 4ac = k^2 - 4\cdot 25\cdot 4 = k^2 - 400 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 400 \Leftrightarrow k = \pm 20$

37. Escribe una ecuación de 2º grado que tenga por soluciones:
a) 2 y 3 b) –2 y 3 c) 2 y –3 d) –2 y –3.

RESOLUCIÓN:

a) $S = 2 + 3 = 5$; $P = 2\cdot 3 = 6 \rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$
b) $S = (-2) + 3 = 1$; $P = (-2)\cdot 3 = -6 \rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + (-6) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$
c) $S = 2 + (-3) = -1$; $P = 2\cdot(-3) = -6 \rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - (-1)x + (-6) = 0\ x^2 + 1x - 6 = 0$
d) $S = (-2)+(-3) = -5$; $P = (-2)\cdot(-3) = 6 \rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - (-5)x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0$

38. Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ b) $2x^4 - 5x^2 + 3 = 0$

RESOLUCIÓN:

a) Ecuación bicuadrada. Hacemos la sustitución $x^2 = t \rightarrow x^4 = t^2$, con lo que la ecuación se transforma en $t^2 - 10t + 9 = 0$ que ya puede resolverse con la fórmula habitual de 2º grado, obteniéndose: $t_1 = 1$; $t_2 = 9$. Ahora procedemos a deshacer el cambio: $x = \sqrt{t}$:
Si $t = 1 \rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$; y si $t = 9 \rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3$. Por tanto cuatro soluciones.

b) Ecuación bicuadrada $\rightarrow 2t^2 - 5t + 3 = 0 \rightarrow t_1 = 1$ y $t_2 = \frac{3}{2}$; $x = \sqrt{t} \rightarrow x = \pm 1$ y $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

39. Encuentra las soluciones de las ecuaciones:
a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ b) $2x^5 - 5x^4 + x^3 + 5x^2 - 3x = 0$

	1	–6	11	–6
1		1	–5	6
	1	–5	6	0
2		2	–6	
	1	–3	0	

RESOLUCIÓN:

a) Ecuación de grado superior a 2 y no bicuadrada o similar. Utilizaremos la regla de Ruffini para buscar las raíces. Si tiene raíces enteras estarán en $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.
Vemos entonces que las raíces son $x_1 = 1$; $x_2 = 2$ y $x_3 = 3$

	2	–5	1	5	–3
1		2	–3	–2	3
	2	–3	–2	3	0
–1		–2	5	–3	
	2	–5	3	0	

b) Sacamos factor común de x: $x(2x^4 - 5x^3 + x^2 + 5x - 3) = 0$. Ahora aplicamos el mismo procedimiento anterior para buscar las raíces de $2x^4 - 5x^3 + x^2 + 5x - 3$. El último factor que hemos obtenido, de segundo grado, puede factorizarse ya con la fórmula: $2x^2 - 5x + 3 = 0 \rightarrow x = 1$ y $x = \frac{3}{2}$.

Las CINCO soluciones son: $x_1 = 0$; $x_2 = x_3 = 1$; $x_4 = -1$; $x_5 = \frac{3}{2}$.

40. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:

a) $\frac{x+1}{x-2} = \frac{x-2}{x-4}$ b) $\frac{9}{x+1} = \frac{1}{x-1} + \frac{8}{x+2}$ c) $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x^2-4}$

RESOLUCIÓN:

a) Siempre que tenemos una igualdad entre dos fracciones, podemos utilizar la propiedad fundamental de las proporciones: producto de extremos = producto de medios: $\frac{x+1}{x-2} = \frac{x-2}{x-4} \Leftrightarrow (x+1)(x-4) = (x-2)2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x = 8$. Resultó ser una ecuación de primer grado con su única solución real.

b) Eliminamos los denominadores multiplicando por su m.c.m. que es $(x + 1)(x - 1)(x + 2)$: $\frac{9}{x+1} = \frac{1}{x-1} + \frac{8}{x+2} \Leftrightarrow 9(x-1)(x+2) = (x+1)(x+2) + 8(x+1)(x-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9x^2 + 9x - 18 = x^2 + 3x + 2 + 8x^2 - 8 \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow x = 2$. También esta vez teníamos una ecuación equivalente a una de primer grado con su solución única.

c) Procedemos de manera análoga. Multiplicamos por el m.c.m. $= x^2 - 4$; $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x^2-4}$ $\Leftrightarrow (x-2) + (x+2) = 1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = ½$.

41. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales (radicales):

a) $x = 7 - \sqrt{x-1}$ b) $\sqrt{\frac{x+1}{x-7}} = 3$ c) $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+2} = 5$ d) $\sqrt{9-x} = \sqrt{6-x} + \sqrt{\frac{x}{2}}$

RESOLUCIÓN:

a) Sólo aparece una raíz. Hacemos que esta raíz quede aislada en uno de los miembros de la ecuación: $x = 7 - \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 7 - x$. Ahora elevamos al cuadrado cada miembro para hacer que desaparezca la raíz. Ahora bien, hemos de tener en cuenta que la nueva ecuación que obtengamos NO es equivalente a la anterior: Contiene las soluciones de la anterior, pero también puede tener alguna solución que no lo sea de la ecuación original. Esto habrá de comprobarse después: $(\sqrt{x-1})^2 = (7-x)^2 \Leftrightarrow x - 1 = 49 - 14x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 15x + 50 = 0 \Leftrightarrow$ $x_1 = 5$ y $x_2 = 10$. Para ver cuál de estas soluciones lo es también de la ecuación original, sustituimos en ésta x por cada uno de estos valores:

Sustituimos en el 2º miembro x por 5: $7 - \sqrt{5-1} = 7 - 2 = 5$. Se verifica la igualdad; por tanto $x = 5$ es solución.

Sustituimos en el 2º miembro x por 10: $7 - \sqrt{10-1} = 7 - 3 = 4 \neq 10$. No se verifica la igualdad. Por tanto $x = 10$ NO es solución.

b) Igual que en el caso anterior, elevamos al cuadrado cada miembro de la ecuación: $\frac{x+1}{x-7} = 9$ $\Leftrightarrow x + 1 = 9x - 63 \Leftrightarrow 8x = 64 \Leftrightarrow x = 8$ que, como puede comprobarse, es solución de la ecuación original.

c) Aparecen dos raíces. Es conveniente aislar una de ellas (cualquiera) en un miembro. Luego elevamos al cuadrado:

$\sqrt{x-3} + \sqrt{x+2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} = 5 - \sqrt{x+2} \rightarrow x - 3 = 25 + x + 2 - 10\sqrt{x+2}$

Aislamos de nuevo la raíz, para después volver a elevar al cuadrado

$30 = 10\sqrt{x+2} \Leftrightarrow 3 = \sqrt{x+2} \rightarrow x + 2 = 9 \rightarrow x = 7$ Solución única.

d) Hay tres raíces. Como ya hay una aislada en uno de los miembros, elevamos al cuadrado: $\sqrt{9-x} = \sqrt{6-x} + \sqrt{\frac{x}{2}} \rightarrow 9 - x = 6 - x + \frac{x}{2} + 2\sqrt{\frac{x(6-x)}{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} - 3 = -2\sqrt{\frac{x(6-x)}{2}} \Leftrightarrow$ (multiplicamos todo por 2) $\Leftrightarrow x - 6 = -4\sqrt{\frac{x(6-x)}{2}}$. Volvemos a elevar al cuadrado:

$(x-6)^2 = 16\frac{x(6-x)}{2} \Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 = 48x - 8x^2 \Leftrightarrow 9x^2 - 60x + 36 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 20x + 12 = 0$ que tiene soluciones $x_1 = 6$ y $x_2 = 2/3$. Comprobamos, sustituyendo en la ecuación original qué valor(-es) nos vale: Sustituimos c = 6 en el 2º miembro: $\sqrt{6-6} + \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3} \rightarrow x = 6$ es solución. Veamos ahora con x = 2/3: $\sqrt{6-\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{2/3}{2}}=\sqrt{\frac{16}{3}}+\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$ → También x = 2/3 es solución.

42. Resuelve las inecuaciones:

a) $x-\frac{1+x}{2}<\frac{1}{4}$ b) $x \le 1-\frac{4-2x}{5}$ c) $\frac{x}{2x-5}<0$ d) $\frac{x+2}{x-1}>4$

RESOLUCIÓN:

a) $x-\frac{1+x}{2}<\frac{1}{4}$ ⇔ (Multiplicamos todo por 4) ⇔ $4x-2(1+x)<1 \Leftrightarrow 4x-2-2x<1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x-2<1 \Leftrightarrow 2x<3 \Leftrightarrow x<\frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in (-\infty, \frac{3}{2})$

b) $x \le 1-\frac{4-2x}{5}$ ⇔ (Multiplicamos todo por 5) ⇔ $5x \le 5-(4-2x) \Leftrightarrow 5x \le 5-4+2x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x \le 1 \Leftrightarrow x \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \in (-\infty, \frac{1}{3}]$

c) Al ser un cociente, hemos de tener en cuenta que el resultado será negativo cuando numerador y denominador sean simultáneamente de signos opuestos: Si $x > 0$, habrá de ser $2x-5<0 \Leftrightarrow x<\frac{5}{2}$, es decir: $x \in (0, +\infty) \cap (-\infty, \frac{5}{2}) = (0, \frac{5}{2})$. Por otra parte, si $x < 0$, habrá de ser $2x-5>0 \Leftrightarrow x>\frac{5}{2}$, es decir: $x \in (\frac{5}{2}, +\infty) \cap (-\infty, 0) = \varnothing$. Luego la solución es (0, 5/2).

La resolución puede disponerse en forma de tabla de doble entrada. Primero vemos donde se anulan numerador y denominador para definir los intervalos que debemos estudiar. El numerador se anula en x = 0 y el denominador en x = 2,5. Por tanto tenemos definidos tres intervalos: (–∞, 0); (0, 2,5) y (2,5; +∞). Estudiaremos qué signo toman numerador y denominador en cada intervalo, así como su cociente:

	(–∞, 0)	(0; 2,5)	(2,5; +∞)
x	–	+	+
2x – 5	–	–	+
x/(2x – 5)	+	–	+

La solución la determina la celda que verifica la condición < 0 de la inecuación: (0; 2,5)

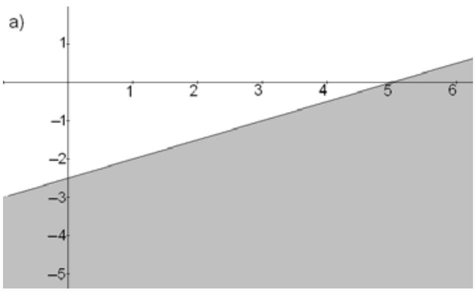
d) $\frac{x+2}{x-1}>4 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-1}-4>0 \Leftrightarrow \frac{6-3x}{x-1}>0$ Razonamos de manera análoga al caso anterior. El numerador se anula en x = 2 y el denominador en x = 1. Por tanto quedan definidos los intervalos: (–∞, 1); (1, 2) y (2, +∞):

	(–∞, 1)	(1, 2)	(2, +∞)
6 – 3x	+	+	–
x – 1	–	+	+
$\frac{6-3x}{x-1}$	–	+	–

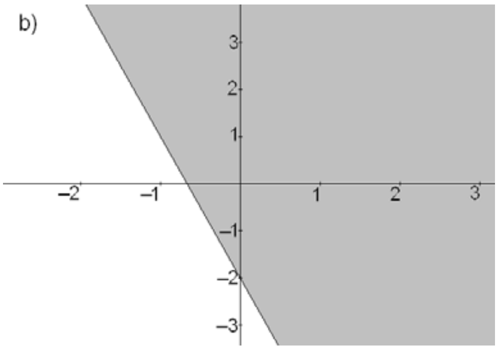
Por tanto, la solución es: x ∈ (1, 2)

43. Resuelve las siguientes inecuaciones con dos incógnitas: a) x – 2y ≥ 5 b) 3x + y + 2 ≥ 0

RESOLUCIÓN:



a) Representamos gráficamente la recta x – 2y = 5 (tabla con dos valores). Observamos que si sustituimos (0, 0) en el miembro de la izquierda de la desigualdad, no se cumple. Por tanto, los puntos que buscamos son precisamente los que están en el lado opuesto de la recta, respecto del (0, 0)
La solución es la zona sombreada.



b) Cumple la desigualdad el semiplano que contiene el (0, 0), ya que éste también la cumple

44. Resuelve las inecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ b) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$ c) $x^2 + x + 1 > 0$

RESOLUCIÓN:

a) Resolvemos la ecuación de 2º grado $x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x_1 = 1$; $x_2 = 2$. Los cambios de signo se producen en las raíces de la ecuación. Es decir, el polinomio $p(x) = x^2 - 3x + 2$ mantiene el mismo signo, a la izquierda de 1, entre 1 y 2, y a la derecha de 2. Para ver qué signo tiene en cada uno de estos intervalos, basta dar un valor en cada uno de ellos: A la izquierda de 1, podemos tomar, p. e. el 0: $p(0) = 2 > 0$. Luego $p(x) > 0$ $\forall x \in (-\infty, 1)$. Análogamente, $p(1,5) = -0,25 < 0$; luego $p(x) < 0$ $\forall x \in (1, 2)$. Y por último, $p(3) = 2 > 0 \rightarrow \forall x \in (2, +\infty)$. Por tanto la solución es $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

Una segunda opción consiste en factorizar el polinomio: $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ y construir una tabla como en las inecuaciones racionales:

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$x - 1$	–	+	+
$x - 2$	–	–	+
$(x - 1)(x - 2)$	+	–	+

La solución queda determinada por las celdas en las que esté el signo acorde con la desigualdad. Como en este caso, además se admite la igualdad, hay que poner corchetes junto a 1 y 2: $x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

Por último, un tercer procedimiento consiste en el análisis gráfico: Se trata de un polinomio de 2º grado con coeficiente líder positivo. Por tanto, la zona de la parábola que está por debajo del eje OX es la correspondiente al intervalo en que $x \in (x_1, x_2)$, es decir, será no negativo en el resto: $x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

b) Resolvemos la ecuación: $x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x_1 = 2 = x_2$. Esto equivale, siguiendo el razonamiento anterior (gráfica), a afirmar que el polinomio no se hace nunca negativo, puesto que entre 2 y 2 no hay más valores. Así pues, la solución es $x = 2$.

c) Esta ecuación no tiene soluciones reales, es decir, la parábola no tiene cortes con los ejes (valores en que el polinomio se hace cero), y como el coeficiente líder es positivo, significa que la parábola está siempre sobre OX, es decir, $p(x)$ es estrictamente positivo para cualquier valor de x. Luego, la solución es $\mathbb{R}$.

45. Resuelve las inecuaciones: a) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4} > 0$ b) $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 5} \leq 0$.

RESOLUCIÓN:

a) Elaboramos la tabla de doble entrada, una vez encontradas las raíces de numerador y denominador y determinados los intervalos.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 3)$	$(3, 4)$	$(4, +\infty)$
$x^2 - 5x + 6$	+	+	–	+	+
$x^2 - 5x + 4$	+	–	–	–	+
$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4}$	+	–	+	–	+

Por tanto, la solución es $x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty)$

b) Es procedimiento de resolución puede hacerse más exhaustivamente detallado si no se domina suficientemente el tratamiento de los polinomios de segundo grado. Para ello podemos factorizar numerador y denominador. Así, buscando previamente las raíces, observamos que $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$ y $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$. Elaboramos una tabla de doble entrada para estudiar los signos de cada factor:

	$(-\infty,-2)$	$(-2, 1)$	$(1, 3)$	$(3, 5)$	$(5, +\infty)$
$(x + 2)$	–	+	+	+	+
$(x - 3)$	–	–	–	+	+
$(x - 1)$	–	–	+	+	+
$(x - 5)$	–	–	–	–	+
$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 5}$	+	–	+	–	+

Como podemos observar, en la última fila, el signo es positivo si el número de signos negativos es par. Hay que tener en cuenta que los denominadores nunca pueden ser nulos, por lo que las raíces del denominador no han de tenerse en cuenta, mientras que, como en este caso el signo de la desigualdad es '≤', hay que incluir también las raíces del numerador, y pondremos corchetes junto a ellas: $x \in (-2, 1] \cup [3, 5)$

46. La capacidad de un depósito cilíndrico aumenta un 4,04% si aumentamos su radio en cinco centímetros. Calcula la longitud del radio del depósito.

RESOLUCIÓN: El volumen del cilindro se calcula mediante $V = \pi r^2 h$. Por tanto, la diferencia entre los volúmenes es $\pi(r+5)^2h - \pi r^2h = \pi(r^2+10r + 25)h - \pi r^2h = \pi(10r + 25)h$ y esta cantidad ha de ser el 4,04% del volumen inicial. O sea: $\pi(10r + 25)h = 0{,}0404\cdot\pi r^2h \rightarrow$ (dividiendo todo por πh) $\rightarrow 10r + 25 = 0{,}0404r^2$. Ecuación de segundo grado que es equivalente a $404r^2 - 10^5r - 25\cdot10^4 = 0$ cuyas soluciones son: $r_1 = 250$ y $r_2 = -250/101$. Como es obvio, nos interesa sólo el valor positivo. Por tanto, la respuesta es 250 cm.

47. Una motora hace un recorrido de ida y vuelta a lo largo de un río con una velocidad media de 11,25 km/h. ¿Qué valor (constante) ha marcado el velocímetro de la lancha, sabiendo que la velocidad de la corriente es de 3 km/h?

RESOLUCIÓN: En un movimiento uniforme, espacio = velocidad × tiempo → tiempo $= \frac{espacio}{velocidad}$. Como no conocemos el espacio recorrido, ni la velocidad de la lancha, usaremos la relación entre éstos. De manera que:

tiempo de ida $= \frac{espacio}{v+3}$; tiempo de vuelta $= \frac{espacio}{v-3}$; tiempo total $= 2\frac{espacio}{11{,}25}$

Además: tiempo de ida + tiempo de vuelta = tiempo total. Esto nos proporciona la ecuación: $\frac{e}{v+3} + \frac{e}{v-3} = \frac{2e}{11{,}25} \Leftrightarrow$ (Dividiendo por e) $\Leftrightarrow \frac{1}{v+3} + \frac{1}{v-3} = \frac{2}{11{,}25}$.

Eliminamos denominadores multiplicando por el m.c.m. que es $11{,}25\cdot(v + 3)(v - 3)$, quedando: $11{,}25(v - 3) + 11{,}25(v + 3) = 2(v - 3)(v + 3) \Leftrightarrow$ (multiplicando por 4 para evitar los decimales) $\Leftrightarrow 4v^2 - 45v - 36 = 0 \rightarrow v_1 = 12$ y $v_2 = -0{,}75$ (no vale).

Por tanto, la solución es $v = 12$ km/h

SISTEMAS DE ECUACIONES E INECUACIONES

48. Resuelve los sistemas: a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y-2z=1 \\ x+2y+5z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=-2 \\ 2x-3y=2 \\ 2y+3z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=0 \\ 2x-3y+z=1 \end{cases}$

RESOLUCIÓN:

a) $\begin{cases} x+y+z=1 & (I) \\ 2x-y-2z=1 & (II) \\ x+2y+5z=0 & (III) \end{cases}$ MÉTODO DE SUSTITUCIÓN: Despejamos una de las incógnitas en una de las ecuaciones y la sustituimos en cada una de las otras. Por ejemplo, despejamos y en (I): y = 1 – x – z (*) → $\begin{cases} 2x-(1-x-z)-2z=1 & (IV) \\ x+2(1-x-z)+5z=0 & (V) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-z=2 & (IV) \\ -x+3z=-2 & (V) \end{cases}$.
Volvemos a aplicar el método de sustitución a este nuevo sistema. Despejamos z en (IV): z = 3x – 2 (**), y sustituimos en (V): –x + 3(3x – 2) = –2 ⇔ 8x – 6 = –2 ⇔ 8x = 4 ⇔ x = ½ . Ahora hemos de ir sustituyendo en (**) y (*) para obtener los valores de z e y: z = 3(½) – 2 = – ½ ; y = 1– ½ –(– ½) = 1. Así, la solución del sistema es (x, y , z) = (½, 1, –½).

b) $\begin{cases} x-y=-2 & (I) \\ 2x-3y=2 & (II) \\ 2y+3z=0 & (III) \end{cases}$ Aplicaremos ahora el método de igualación: Despejamos la misma incógnita en las tres ecuaciones y las igualamos dos a dos. Por ejemplo, despejamos y: $\begin{cases} y=x+2 & (I) \\ y=\frac{2x-2}{3} & (II) \\ y=-\frac{3z}{2} & (III) \end{cases}$ De igualar (I) y (II) se tiene: 3(x + 2) = 2x – 2 ⇔ 3x + 6 = 2x – 2 ⇔ x = –8.
En este caso concreto, conocemos ya el valor de una de las incógnitas, y sustituyendo, p. e. en (I) obtenemos y = –8 + 2 = –6. Ahora sustituimos este valor de y en (III): 2·(–6) + 3z = 0 ⇔ z = 4. Así, la solución del sistema será: (x, y, z) = (–8, –6, 4)

c) $\begin{cases} x+y+z=6 & (I) \\ x-y-z=0 & (II) \\ 2x-3y+z=1 & (III) \end{cases}$ MÉTODO DE REDUCCIÓN: Consiste en hacer las transformaciones necesarias en cada ecuación, de manera que al sumarlas (restarlas) se eliminen incógnitas. Así, observamos que si sumamos (I) y (II), se eliminan las incógnitas y, z. Por tanto, (I) +(II) → 2x = 6 ⇔ x = 3. Sustituyendo este valor en (II) y (III), se obtiene el nuevo sistema: $\begin{cases} -y-z=-3 & (IV) \\ -3y+z=-5 & (V) \end{cases}$. Sumamos ahora (IV) + (V) → –4y = –8 ⇔ y = 2. Ahora ya podemos obtener z de cualquiera de las ecuaciones. Por ejemplo, de (IV) –2 – z = –3 ⇔ z = 3 – 2 = 1. Por tanto, solución: (x, y, z) = (3, 2, 1)

49. Utiliza el método de Gauss para resolver: a) $\begin{cases} 2x+3y+z=5 \\ x+2y-z=2 \\ 3x-y+3z=-2 \\ -x+2y-z=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y-z=4 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$

RESOLUCIÓN: El método de Gauss consiste en triangularizar el sistema multiplicando ecuaciones por un número y sumando a las demás de forma que en cada ecuación haya una incógnita menos:

a) $\begin{cases} 2x+3y+z=5 \\ x+2y-z=2 \\ 3x-y+3z=-2 \\ -x+2y-z=4 \end{cases}$ ⇔ (Cambiamos de orden las ecuaciones para conseguir que el primer coeficiente sea 1) ⇔ $\begin{cases} x+2y-z=2 & (I) \\ 2x+3y+z=5 & (II) \\ 3x-y+3z=-2 & (III) \\ -x+2y-z=4 & (IV) \end{cases}$. Esto facilitará los cálculos, como veremos. Ahora, hacemos: (V) = (II) – 2(I); (VI) = (III) – 3(I) y (VII) = (IV)+(I), obteniéndose el sistema: $\begin{cases} x+2y-z=2 & (I) \\ -y+3z=1 & (V) \\ -7y+6z=-8 & (VI) \\ 4y-2z=6 & (VII) \end{cases}$. Seguimos el proceso de triangularización: Dejamos (I) y (V) inalteradas. Para conseguir ceros en la segunda columna, obtenemos (VIII) = –7(V) + (VI) y (IX) = 4(V) + (VII): $\begin{cases} x+2y-z=2 & (I) \\ -y+3z=1 & (V) \\ -15z=-15 & (VIII) \\ 10z=10 & (IX) \end{cases}$. El proceso de triangularización está concluido. Observamos que las ecuaciones (VIII) y (IX) son equivalentes (proporcionales) así que podemos 'eliminar' cualquiera de ellas, por ejemplo (VIII). Ahora vamos despejando incógnitas desde 'abajo' y sustituyendo hacia 'arriba': De (IX) se obtiene que z = 1. Sustituimos en (V) –y + 3 = 1→ y = 2. Y ahora sustituimos en (I): x + 4 – 1 = 2 → x = –1 Por tanto, la solución es (x, y z) = (–1, 2, 1)

b) $\begin{cases} x-y-z=4 & (I) \\ 2x-y+z=1 & (II) \end{cases}$ Sustituimos (II) por (III) = –2(I) + (II): $\begin{cases} x-y-z=4 & (I) \\ y+3z=-7 & (III) \end{cases}$

Como no disponemos de más ecuaciones, no podemos seguir triangularizando más. En la última ecuación nos quedan dos incógnitas, lo que significa que se trata de un sistema indeterminado. Hemos de considerar una de las incógnitas como parámetro, por ejemplo z = t, y entonces, pasando el parámetro al segundo miembro, el nuevo sistema es $\begin{cases} x-y=4+t \\ y=-7-3t \end{cases}$ en el que la y ya está despejada, y sustituyendo en la primera ecuación: x = 4 + t + (–7 – 3t) = –3 – 2t. Por tanto: (x, y, z) = (–3–2t, –7–3t, t). Hay infinitas soluciones: una por cada valor que demos al parámetro t.

50. Estudia la compatibilidad de los sistemas: a) $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x-y+3z=2 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y+3z=4 \\ 2x-y+2z=4 \\ x+y-5z=-4 \end{cases}$

RESOLUCIÓN: Un buena manera de estudiar la compatibilidad es utilizar el método de Gauss.

a) $\begin{cases} x-y+2z=1 & (I) \\ 2x-y+3z=2 & (II) \\ x+2y-z=2 & (III) \end{cases}$ ⇔ [(II) ↔ –2(I) + (II); (III) ↔ –1(I) + (III)] ⇔ $\begin{cases} x-y+2z=1 & (I) \\ y-z=0 & (II)' \\ 3y-3z=1 & (III)' \end{cases}$ ⇔ [(III)' ↔ –3(II)' + (III)'] ⇔ $\begin{cases} x-y+2z=1 & (I) \\ y-z=0 & (II)' \\ 0=1 & (III)'' \end{cases}$ Observamos en la ecuación (III)", una incongruencia ya que 0 ≠ 1 → SISTEMA INCOMPATIBLE.

b) $\begin{cases} x-y+3z=4 & (I) \\ 2x-y+2z=4 & (II) \\ x+y-5z=-4 & (III) \end{cases}$ ⇔ [(II) ↔ –2(I) + (II); (III) ↔ –1(I) + (III)] ⇔ $\begin{cases} x-y+3z=4 & (I) \\ y-4z=-4 & (II)' \\ 2y-8z=-8 & (III)' \end{cases}$ ⇔ [(III)' ↔ –2(II)' + (III)'] ⇔ $\begin{cases} x-y+3z=4 & (I) \\ y-4z=-4 & (II)' \\ 0=0 & (III)'' \end{cases}$

La identidad de la ecuación (III)" nos indica que estamos ante un S. COMPATIBLE INDETERMINADO

51. Resuelve los sistemas de ecuaciones no lineales: a) $\begin{cases} x+y=17 \\ x^2+y^2=169 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=28 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$

RESOLUCIÓN:

a) En este tipo de sistemas, el método más habitual es el de sustitución. Despejamos y en la primera ecuación y sustituimos en la 2ª: y = 17 – x → $x^2 + (17 - x)^2 = 169$ ⇔ $2x^2 - 34x + 120 = 0$ ⇔ $x^2 - 17x + 60 = 0$ → $x_1 = 5$ y $x_2 = 12$ de donde sacamos que $y_1 = 12$ y $y_2 = 5$. Por tanto, las soluciones son $(x_1, y_1) = (5, 12)$ y $(x_2, y_2) = (12, 5)$

b) Restando a la primera ecuación la segunda, xy = 8 (*) → y = 8/x.

Sustituimos ahora en la 2ª: $x^2 + (8/x)^2 = 20$ ⇔ $x^2 + 64/x^2 = 20$ ⇔ $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

(bicuadrada) $\Leftrightarrow t^2 - 20t + 64 = 0 \rightarrow t_1 = 4$ y $t_2 = 16 \rightarrow x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -4$, $x_4 = 4$. Sustituyendo ahora en (*): $y_1 = -4$, $y_2 = 4$, $y_3 = -2$, $y_4 = 2$.

52. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} \frac{x-4}{3} \geq x+2 \\ x > 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1}{2} - x \geq 1 - \frac{3x}{4} \\ x - \frac{3}{2} \leq \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y + 1 < 0 \\ 2x - y - 1 \geq 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{1-x}{2} > \frac{y}{4} \\ x - y < 1 - \frac{x+y}{2} \end{cases}$

RESOLUCIÓN:

a) Resolvemos por separado las dos inecuaciones. Luego tomamos la intersección de las soluciones:

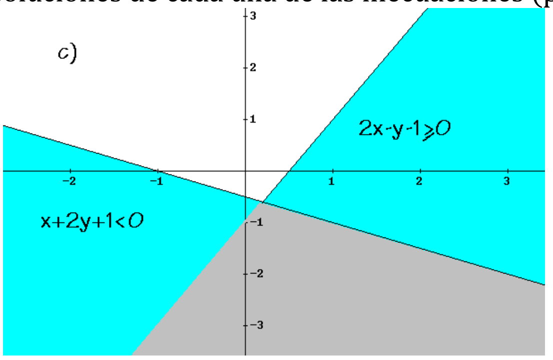
(I) $\frac{x-4}{3} \geq x + 2 \Leftrightarrow x - 4 \geq 3(x+2) \Leftrightarrow x - 4 \geq 3x + 6 \Leftrightarrow -10 \geq 2x \Leftrightarrow x \leq -5 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -5]$

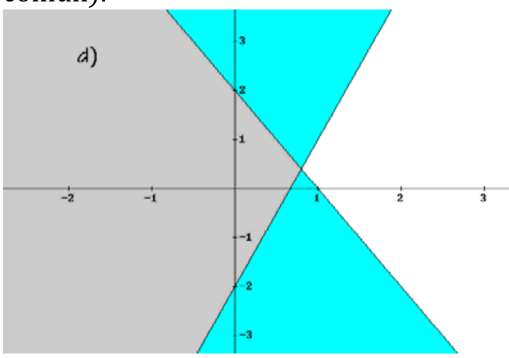
(II) $x > 1 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$. Por tanto, la solución es $x \in (-\infty, -5] \cap (1, +\infty) = \varnothing$

b) Multiplicamos por 4 la 1ª inecuación: $2 - 4x \geq 4 - 3x \Leftrightarrow x \leq -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2]$

De la 2ª, multiplicando por 4: $4x - 6 \leq 2x - 1 \Leftrightarrow 2x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow x \in (-\infty. \frac{5}{2}]$. Por tanto, la solución del sistema será: $x \in (-\infty, -2] \cap (-\infty. \frac{5}{2}] = (-\infty, -2]$

Para los apartados c) y d) representamos gráficamente las rectas que se obtienen de sustituir las desigualdades por igualdades. Resolvemos por separado cada inecuación (en general la solución es un semiplano) y luego tomamos como solución del sistema la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones (parte común).





53. Suena una sirena en una fábrica y a los 25 segundos suena la de otra fábrica situada a 11 Km y 700 m de la primera. Sabiendo que Elena se encuentra entre ambas fábricas y oye las sirenas a la vez, calcula la distancia a la que se encuentra de cada una de ellas. (Velocidad del sonido en el aire: 340 m/s)

RESOLUCIÓN:

Suponemos que Elena está a x metros de la primera fábrica e y metros de la segunda. Esto significa que $x + y = 11700$. Por otro lado, el tiempo que tarda el sonido de la sirena de la primera fábrica en llegar a Elena es $t_1 = e/v = x/340$, y el de la segunda sirena $t_2 = y/340$. Como además, la segunda sirena suena 25 segundos más tarde: $t_1 = t_2 + 25$. Es decir, tenemos el sistema: $\begin{cases} x + y = 11700 \\ \frac{x}{40} = \frac{y}{340} + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 11700 \\ x - y = 8500 \end{cases}$. Resolvemos por reducción: $2x = 20200 \Leftrightarrow x = 10100$ metros. Es decir, Elena se encuentra a 10100 metros de la primera fábrica y 1600 metros de la segunda.

54. En un número de tres cifras, la de las unidades es el doble de la suma de las otras dos. Si se intercambian las dos últimas cifras, el número aumenta en 18 unidades. Y si invertimos el orden de las cifras, el número que se obtiene es tres unidades inferior que el doble del número inicial. Hállalo.

RESOLUCIÓN:

Si llamamos x, y, z a las cifras del número (x centenas, y decenas, z unidades), dicho número puede escribirse en su forma polinómica: $n = 100x + 10y + z$. Y el número que resulta de invertir el orden de sus cifras será $100z + 10y + x$. Traducimos a lenguaje algebraico:

'La cifra de las unidades es el doble de la suma de las otras dos'

$$z = 2(x + y) \Leftrightarrow 2x + 2y - z = 0 \qquad (I)$$

'Si se intercambian las dos últimas, aumenta en 18 unidades'

$$100x + 10z + y = 100x + 10y + z + 18 \Leftrightarrow -y + z = 2 \quad (II)$$

'Si invertimos el orden de las cifras se obtiene otro tres unidades inferior que el doble del inicial'

$$100z + 10y + x = 2(100x + 10y + z) - 3 \Leftrightarrow 199x + 10y - 98z = 3 \ (III)$$

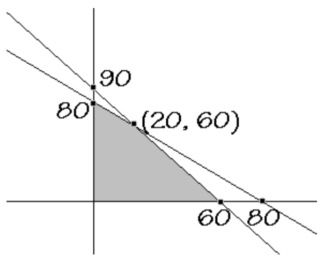
Hemos obtenido entonces un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: $\begin{cases} 2x + 2y - z = 0 & (I) \\ -y + z = 2 & (II) \\ 199x + 10y - 98z = 3 & (III) \end{cases}$ que una vez resuelto (por el método apropiado) nos proporciona la solución: (x, y, z) = (1, 0, 2). Por tanto, el número es el 102.

55. Una tienda de material deportivo vende dos calidades de pantalones en diferentes colores. El precio de coste por unidad de cada uno es de 30 € y 20 € respectivamente. El beneficio que se obtiene en la venta de cada uno de los modelos es de 4 € y 3 €. El dueño del establecimiento sólo tiene 1800 € para la inversión; y además, en su pequeño almacén no le caben más de 80 pantalones. ¿Cuál es la cantidad más conveniente de unidades de cada calidad para que el beneficio obtenido en la venta sea el máximo posible?

RESOLUCIÓN:

Si llamamos x al número de unidades de la primera calidad e y al de la segunda, tenemos que $x + y \le 80$ ya que no caben más de 80 en el almacén. Por otro lado, debido a la limitación del presupuesto, $30x + 20y \le 1800$. Y evidentemente, $x \ge 0$, $y \ge 0$. El beneficio total vendrá dado por $B(x, y) = 4x + 3y$. Tenemos, entonces un sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x + y \le 80 \\ 30x + 20y \le 1800. \\ x \ge 0; \quad y \ge 0 \end{cases}$$



Estas situaciones dan lugar a los llamados problemas de PROGRAMACIÓN LINEAL. El sistema de inecuaciones delimita un recinto poligonal (ver figura). Los extremos de la función B(x, y) se alcanzan en los vértices de dicho polígono. Así, es evidente que en (0, 0) se alcanza el mínimo: B(0, 0) = 0. En el vértice (0, 80): B(0, 80) = 240 €. En el vértice (60, 0): B(60, 0) = 240 €. Por último en (20, 60): B(20, 60) = 4·20 + 3·60 = 260 € que es el beneficio máximo. Por tanto, la cantidad más conveniente es 20 pantalones de la primera calidad y 60 de la segunda.

NÚMEROS COMPLEJOS

56. Dados los números complejos $z_1 = 1 + i$, y $z_2 = 2 - 3i$, calcula $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2,

RESOLUCIÓN:

$z_1 + z_2 = (1 + i) + (2 - 3i) = (1 + 2) + (1 + (-3))i = 3 - 2i.$

$z_1 - z_2 = (1 + i) - (2 - 3i) = (1 - 2) + (1 - (-3))i = -1 + 4i.$

$z_1 \times z_2 = (1 + i) \times (2 - 3i) = 1\times2 + 1\times(-3i) + i\times2 + i\times(-3i) = 2 - 3i + 2i - 3i^2 = 2 - i - 3(-1) = 5 - i.$

Para dividir dos números complejos, se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{2-3i} = \frac{(1+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{1\cdot2+1\cdot3i+i\cdot2+i\cdot3i}{2^2-(3i)^2} = \frac{-1+5i}{13} = -\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i$

Para sumar y restar números complejos ha de utilizarse necesariamente la forma binómica. Pero para el producto y división, puede ser más cómodo usar la forma polar. Así, z_1 en forma polar sería: $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; y el argumento: $\varphi_1 = \text{arctg}(1/1) = 45° \rightarrow z_1 = \sqrt{2}_{45°}$.

Igual, para z_2: $|z_2| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$, y $\varphi_2 = \text{arctg}(-3/2) = -56°39' \rightarrow z_2 = \sqrt{13}_{-56°39'}$

Para multiplicar números complejos en forma polar, se multiplican los módulos y se suman los argumentos:

$z_1 \times z_2 = \sqrt{2}_{45°} \times \sqrt{13}_{-56°39'} = (\sqrt{2} \times \sqrt{13})_{45°+(-56°39')} = (\sqrt{2} \times \sqrt{13})_{-11°19'}$

Para dividir números complejos en forma polar, se dividen los módulos y se restan los argumentos: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}_{45^\circ}}{\sqrt{13}_{-56^\circ 39'}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}_{45^\circ-(-56^\circ 39')} = \frac{\sqrt{26}}{13}_{101^\circ 39'}$

57. Idem tomando $z_1 = 1 + \sqrt{2}\,i$, y $z_2 = 1 - \sqrt{3}\,i$.

RESOLUCIÓN:

$z_1 + z_2 = (1 + \sqrt{2}i) + (1 - \sqrt{3}i) = 2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})i$

$z_1 - z_2 = (1 + \sqrt{2}i) - (1 - \sqrt{2}i) = (\sqrt{2} + \sqrt{3})\, i.$

$z_1 \times z_2 = (1 + \sqrt{2}i) \times (1 - \sqrt{3}i) = 1\times 1 + 1\times(-\sqrt{3}i) + \sqrt{2}i\times 1 + \sqrt{2}i\times(-\sqrt{3}i) = (1+\sqrt{6}) + (\sqrt{2}-\sqrt{3})i.$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(1+\sqrt{2}i)(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)} = \frac{1\cdot 1+1\cdot\sqrt{3}i+\sqrt{2}i\cdot 1+i\cdot\sqrt{3}i}{1^2-(\sqrt{3}i)^2} = \frac{(1-\sqrt{3})+(\sqrt{2}+\sqrt{3})i}{4} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}i$

En forma polar: $|z_1| = \sqrt{3}$; $\varphi_1 = \text{arctg}(\sqrt{2}) = 54^\circ 44'$; $|z_2| = 2$; $\varphi_2 = \text{artg}(-\sqrt{3}) = -60^\circ$

$z_1 \times z_2 = \sqrt{3}_{(54^\circ 44')} \times 2_{(-60^\circ)} = 2\sqrt{3}_{(-5^\circ 16')}$ $z_1/z_2 = \sqrt{3}_{(54^\circ 44')}/2_{(-60^\circ)} = \frac{\sqrt{3}}{2}_{114^\circ 44'}$

58. Calcula las potencias i^9, i^{12}, i^{2037}, $(3 - 2i)^5$.

RESOLUCIÓN:

$i^0 = 1$; $i^1 = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -1\cdot i = -i$; $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$. Los resultados se repetirán con periodicidad 4 en el exponente. Por tanto, habrá que reducir a módulo 4, cada uno de los exponentes: $9 = 4\times 2 + 1 \rightarrow i^9 = i^{4\times 2+1} = i^{4\times 2}\cdot i^1 = (i^4)^2\cdot i^1 = 1^2\cdot i = i$.

En realidad, sólo hay que tener en cuenta el resto de dividir el exponente por 4: 9 dividido por 4 da resto 1. Por eso $i^9 = i^1 = i$.

$12 = 3\times 4 \rightarrow$ El resto de la división por 4 es $0 \rightarrow i^{12} = i^0 = 1$

$2037 = 509\times 4 + 1 \rightarrow$ El resto de la división por 4 es $1 \rightarrow i^{2037} = i^1 = i$

$(3 - 2i)^5 = (3 - 2i)\times(3 - 2i)\times(3 - 2i)\times(3 - 2i)\times(3 - 2i) = -597 - 122i$. Esta operación se puede simplificar de manera importante utilizando la forma polar:

$|3 - 2i| = \sqrt{13}$; $\arg(3 - 2i) = \text{arctg}(-2/3) = -33^\circ 41'$. Para efectuar una potencia en forma polar, se eleva el módulo al exponente y se multiplica por éste el argumento. Así:

$(3 - 2i)^5 = [\sqrt{13}_{(-33^\circ 41')}]^5 = (\sqrt{13})^5_{(5\times(-33^\circ 41'))} = \sqrt{13}^5_{-168^\circ 25'} = 169\sqrt{13}_{191^\circ 35'}$

59. Calcula de dos formas distintas $\sqrt{3-4i}$

RESOLUCIÓN:

FORMA 1ª: $\sqrt{3-4i} = a + bi \rightarrow$ (elevamos al cuadrado) $\rightarrow 3 - 4i = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. Identificamos ahora las partes reales de estas expresiones: $3 = a^2 - b^2$ (I), y las partes imaginarias: $-4 = 2ab$ (II). Entonces, tenemos un sistema de ecuaciones con dos incógnitas: a y b. De (II) se tiene que $b = -2/a$. Sustituimos en (I): $a^2 - (-2/a)^2 = 3 \Leftrightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0$. Ecuación bicuadrada, que se resuelve ($t^2 - 3t - 4 = 0$) proporcionándonos las soluciones $a_1 = -2$, $a_2 = 2$, $a_3 = -i$, y $a_4 = i$. Como a debe ser un número real, las dos últimas soluciones no nos valen. Sustituyendo ahora en (II): $b_1 = 1$ y $b_2 = -1$.

Por tanto las dos raíces cuadradas de $3 - 4i$ son $-2 + i$ y $2 - i$.

FORMA 2ª: En forma polar $3 - 4i = 5_{(-53º8')}$. Para hallar la raíz n-sima de un número complejo en forma polar, se extrae la raíz n-sima del módulo y se toma como argumentos de las raíces los valores $(\varphi + k360º)/n$, donde k puede tomar los valores 0, 1, 2, … …, n – 1. En nuestro caso, n = 2. Por tanto, tomaremos $\varphi = -53º8'$, con k = 0 y k = 1.

1ª raíz: $\sqrt{5}_{\frac{-53^\circ 8'+0^\circ}{2}} = \sqrt{5}_{-26^\circ 34'}$ 2ª raíz: $\sqrt{5}_{\frac{-53^\circ 8'+360^\circ}{2}} = \sqrt{5}_{153^\circ 26'}$

60. ¿Qué ecuación de 3er grado, con coeficientes reales, tiene soluciones $z_1 = 1$ y $z_2 = 2 - 3i$?

RESOLUCIÓN:

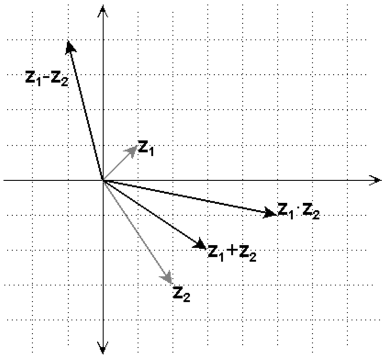
Toda ecuación con coeficientes reales, si tiene una solución compleja, ha de tener también su conjugada. Por tanto, las tres soluciones deben ser $x_1 = 1$; $x_2 = 2 - 3i$; $x_3 = 2 + 3i$. Por tanto, la ecuación es $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$; es decir: $(x - 1)[(x - 2)^2 - (3i)^2] = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 4x + 4 + 9) = (x - 1)(x^2 - 4x + 13) = x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = 0$

61. Representa gráficamente los datos y resultados del ejercicio 56.

RESOLUCIÓN:

Todo número complejo a + bi, puede escribirse en forma de par (a, b), que a su vez puede representarse gráficamente en el plano mediante un punto (coordenadas cartesianas) o mediante el vector de posición de dicho punto que no es más que el vector con origen en (0, 0) y extremo en (a, b). De esta forma, la representación gráfica es como vemos en la figura:



62. Los puntos A(2, 0), B(0, 4), C(–2, 0) y D(0, –4) constituyen las coordenadas de los vértices de un rombo. ¿Qué coordenadas tendrán los vértices del rombo que se obtiene de girar el anterior 90º alrededor de su centro?

RESOLUCIÓN:

Como al multiplicar números complejos, se suman los argumentos, si queremos producir un giro de 90°, se trata de añadir 90° al argumento de los números complejos cuyos afijos son los vértices, o lo que es equivalente, multiplicar cada uno de ellos por i ya que este número tiene módulo 1 (lo cual no altera el módulo del otro factor al multiplicar) y argumento 90° (lo que produce el efecto deseado de girar 90°). Así, buscamos los números correspondientes a cada vértice: A(2, 0) → 2 + 0i = 2 = $2_{(0°)}$. Multiplicado por i nos da: $2_{(0°)}\times 1_{(90°)} = 2_{(90°)}$ → A'(0, 2) B(0, 4) → 0 + 4i = 4i = $4_{(90°)}$. Multiplicamos: $4_{(90°)}\times 1_{(90°)} = 4_{(180°)}$ → B'(–4, 0) C(–2, 0) → –2 + 0i = –2 = $2_{(180°)}$. Producto: $2_{(180°)}\times 1_{(90°)} = 2_{(270°)}$ → C'(0, –2) D(0, –4) → 0 – 4i = –4i = $4_{(270°)}$. Al multiplicar: $4_{(270°)}\times 1_{(90°)} = 4_{(360°)} = 4_{(0°)}$ → D'(4, 0) Los vértices del rombo tras el giro de 90° son A'(0, 2), B'(–4, 0), C'(0, –2) y D'(4, 0)

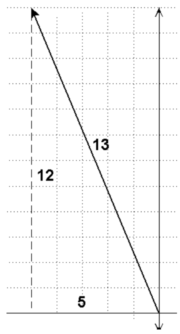
63. El número complejo z es tal que sumado a su inverso da la unidad. Calcula z.

RESOLUCIÓN:

$z + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow$ (multiplicamos todo por z) $\Leftrightarrow z^2 + 1 = z \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$ De donde obtenemos, con la fórmula habitual, las dos soluciones: $z = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

TRIGONOMETRÍA

64. Calcula las razones trigonométricas del ángulo formado por el eje OX y la recta que une el origen de coordenadas con el punto (–5, 12)



RESOLUCIÓN:

Según podemos ver en la figura, la hipotenusa del triángulo rectángulo mide $\sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$. Así, es fácil establecer que:

$$\text{sen}\varphi = \frac{12}{13} \cong 0'9231 \quad \cos\varphi = -\frac{5}{13} \cong -0'3846 \quad \text{tg}\varphi = -\frac{12}{5} = -2'4$$

Y de estos valores, obtenemos sus inversos:

$$\text{cosec}\varphi = \frac{13}{12} \cong 1'0833 \quad \sec\varphi = -\frac{13}{5} = -2'6 \quad \cot\varphi = -\frac{5}{12} \cong -0'4167$$

65. Calcula todas las razones trigonométricas de un ángulo del tercer cuadrante cuya secante vale –2.

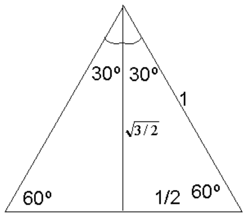
RESOLUCIÓN: $\cos\varphi = \frac{1}{sec\varphi} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$ $\text{sen}\varphi = \sqrt{1 - cos^2\varphi} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Como φ está en el tercer cuadrante, el seno ha de ser negativo → $\text{sen}\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg}\varphi = \frac{sen\varphi}{cos\varphi} = \frac{-1/2}{-\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ Por tanto: $\cot\varphi = \sqrt{3}$ y $\text{cosec}\varphi = \frac{1}{sen\varphi} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

66. Obtén de manera razonada las razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°

RESOLUCIÓN:



ÁNGULO DE 30°: Observando la figura del triángulo equilátero de lado la unidad, se tiene que: sen30° = ½; cos30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$; tg 30° = sen30°/cos30° $= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ÁNGULO DE 60°: A partir de la misma figura, se observa que: $\text{sen}60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos 60° = ½ \quad \text{tg}60° = \text{sen}60°/\cos 60° = \sqrt{3}$

ÁNGULO DE 45°: A partir de un triángulo isósceles rectángulo de hipotenusa 1, tenemos que los ángulos agudos miden 45° cada uno, y si cada cateto mide x, según el teorema de Pitágoras: $x^2 + x^2 = 1 \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Por tanto, tenemos que: sen45° = cos45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Y entonces tg45° = 1.

67. Calcula las razones trigonométricas de –30° y 1260° (sin calculadora)

RESOLUCIÓN:

$\text{sen}(-30°) = -\text{sen}(30°) = -\frac{1}{2}$; $\cos(-30°) = \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{tg}(-30°) = \frac{sen(-30°)}{\cos(-30°)} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Dividiendo 1260° entre 360° se obtiene que 1260° = 360°×3 + 180°. Cada 360° de más no caracteriza al ángulo:

$\text{sen}(1260°) = \text{sen}(180°) = 0 \qquad \cos(1260°) = \cos(180°) = -1 \quad \text{tg}(1260°) = \text{tg}(180°) = 0$

68. Simplifica la expresión: $\frac{sen2x}{1+cos2x}$

RESOLUCIÓN:

$$\frac{sen2x}{1+cos2x} = \frac{2\cdot senx\cdot cosx}{1+cos^2x-sen^2x} = \frac{2\cdot senx\cdot cosx}{cos^2x+(1-sen^2x)} = \frac{2\cdot senx\cdot cosx}{cos^2x+cos^2x} = \frac{2\cdot senx\cdot cosx}{2\cdot cosx\cdot cosx} = \frac{senx}{cosx} = tgx$$

69. Demuestra que: a) $1 + \sec 2x = \frac{tg2x}{tgx}$ b) $tg\frac{x}{2} = \frac{senx}{1+cosx}$ c) $sec^2\frac{x}{2} = \frac{2secx}{1+secx}$

RESOLUCIÓN

a) Partimos del miembro de la derecha de la igualdad y vamos desarrollando según expresiones equivalentes: $\frac{tg2x}{tgx} = \frac{2tgx/_{1-tg^2x}}{tgx} = \frac{2}{1-tg^2x} = \frac{2}{1-\frac{sen^2x}{cos^2x}} = \frac{2cos^2x}{cos^2x-sen^2x} = \frac{cos^2x+cos^2x}{cos2x} =$

$$= \frac{cos^2x-sen^2x+sen^2x+cos^2x}{cos2x} = \frac{cos2x+1}{cos2x} = 1 + \frac{1}{cos2x} = 1 + sec2x$$

b) $$tg\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-cosx}{1+cosx}} = \sqrt{\frac{(1-cosx)(1+cosx)}{(1+cosx)(1+cosx)}} = \sqrt{\frac{1-cos^2x}{(1+cosx)^2}} = \sqrt{\frac{sen^2x}{(1+cosx)^2}} = \frac{senx}{1+cosx}$$

c) $$sec^2\frac{x}{2} = \frac{1}{cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2}{1+cosx} = \frac{\frac{2}{cosx}}{\frac{1+cosx}{cosx}} = \frac{\frac{2}{cosx}}{\frac{1}{cosx}+1} = \frac{2secx}{secx+1}$$

70. Resuelve las ecuaciones trigonométricas:

a) cos2x + senx = 1 b) 5secx – 4cosx = 8 c) 4cos2x + 3cosx = 1

RESOLUCIÓN: En general, es conveniente seguir las siguientes etapas:

I) Reducir a un único argumento
II) Reducir a una única razón trigonométrica
III) Sustituir la razón por una sola letra
IV) Resolver la ecuación algebraica resultante
V) Interpretar el resultado para x.

a) $\cos 2x + \text{sen}x = 1 \Leftrightarrow (I) \Leftrightarrow \cos^2x - \text{sen}^2x + \text{sen}x = 1 \Leftrightarrow (II) \Leftrightarrow 1 - \text{sen}^2x - \text{sen}^2x + \text{sen}x = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (III) \Leftrightarrow 1 - s^2 - s^2 + s = 1 \Leftrightarrow s - 2s^2 = 0 \Leftrightarrow s(1-2s) = 0 \Leftrightarrow (IV) \Leftrightarrow \begin{cases} s = 0 \\ s = \frac{1}{2} \end{cases}$. Ahora viene (V), la interpretación de los resultados: Si s = 0 ⇔ senx = 0 ⇔ x = 0 + k·π, k∈ℤ□ (en radianes).

Por otra parte, si s = ½ ⇔ senx = ½ ⇔ x = π/6 + 2kπ, o x = 5π/6 + 2kπ, k∈ ℤ□□

b) 5secx – 4cosx = 8 ⇔ (II) ⇔ 5/cosx – 4cosx = 8 ⇔ (III) ⇔ 5/c – 4c = 8 ⇔ 5 – 4c² = 8c ⇔ ⇔ 4c² + 8c –5 = 0 ⇔ (IV) ⇔ c_1 = ½ y c_2 = –5/2. Esta segunda solución no tiene sentido ya que –1 ≤ cosx ≤ 1. Por tanto, c = ½ → (V) → cosx = ½ ⇔ x = $\frac{\pi}{3}$ + 2kπ o x = $\frac{5\pi}{3}$ + 2kπ, k∈ ℤ□□ c) 4cos2x + 3cosx = 1 ⇔ (I) 4cos²x – 4sen²x + 3cosx = 1 ⇔ (II) ⇔ 4cos²x – 4(1 – cos²x) + 3cosx = 1 ⇔ (III) ⇔ 8c² + 3c – 5 = 0 ⇔ (IV) ⇔ c_1 = –1 y c_2 = 5/8 ⇔ (V) cosx = –1 ⇔ x = (2k+1)π, k∈ ℤ; cosx = 5/8 ⇔ x = 0'8957 + 2kπ o –0'8957 + 2(k+1)π, k∈ ℤ. Por tanto, las soluciones son: x = (2k+1)π, x = 0'8957 + 2kπ, –0'8957 + 2(k+1)π, k∈ ℤ.

71. Resuelve el sistema $\begin{cases} sen^2x + y = 2 \\ cos^2x + y = 1 \end{cases}$

RESOLUCIÓN: Es más complicado dar una regla generalizada para la resolución de los sistemas trigonométricos. En este caso parece evidente que debemos utilizar el método de reducción, ya que si restamos a la segunda ecuación la primera, se elimina la 'y' y nos queda una expresión conocida: cos²x – sen²x = –1 ⇔ cos2x = – 1 ⇔ 2x = (2k+1)π, k∈ ℤ. Por tanto las soluciones para x son: x = $\frac{2k+1}{2}\pi$, k∈ ℤ. De donde podemos obtener, sustituyendo en la primera o segunda ecuación, el valor de y: y = 1 – cos²x = 1 – $\cos^2\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)$ = 1 ⇔ y = 1

72. Construye una fórmula que nos facilite el sen3α en función de senα

RESOLUCIÓN:

sen3x = sen (2x + x) = sen2x·cosx + senx·cos2x = 2senx·cosx·cosx + senx(cos²x – sen²x)=
= 2senx·cos²x + senx·cos²x – sen³x = 3senxcos²x – sen³x = 3senx(1 – sen²x) – sen³x =
= 3senx – 3sen³x – sen³x = 3senx–4sen3x. Por tanto: sen3x = 3senx – 4sen³x

73. Resuelve el triángulo rectángulo del que se conocen:
I) B = 60°, C= 30°, b = 3 cm; II) c = 4 cm y b = 3 cm III) B = 27°, a = 5 cm

RESOLUCIÓN: Cuando el triángulo es rectángulo, siempre que no se advierta lo contrario, supondremos que A = 90°. En este tipo de problemas, las herramientas son muy sencillas: Definiciones de seno (cateto opuesto/hipotenusa), coseno (cateto contiguo/hipotenusa) y tangente (cateto opuesto/cateto contiguo), y el teorema de Pitágoras.

I) Hemos de encontrar a (hipotenusa) y c: senB = $\frac{b}{a}$ ⇔ sen60° = $\frac{3}{a}$ ⇔ a = $\frac{3}{sen60°}$ ≅ 3,464 cm. Para obtener c: a) Tª Pitágoras: c = $\sqrt{a^2 - b^2}$ = $\sqrt{3{,}464^2 - 3^2}$ ≅ 1,732 cm. O bien, más conveniente, en el sentido de que sólo se utilizan datos del enunciado (no afectados de error): b) tgC = $\frac{c}{b}$ → c = b·tgC = 3·tg30° ≅ 1,732 cm

II) Hemos de averiguar a, B y C. Los ángulos B y C podemos averiguarlos sin necesidad de utilizar la hipotenusa (a) con lo que evitamos errores de cálculo-redondeo. tgB = $\frac{b}{c}$ → B = arctg$\frac{b}{c}$ = arctg(0,75) ≅ 36°52'; de manera análoga, se tiene tgC = $\frac{c}{b}$ → C = arctg$\frac{c}{b}$ = arctg(1,3333) ≅ 53°8' (O sencillamente C = 90° – B = 90° – 36°52' = 53°8'). Y ahora, el valor de a, lo obtenemos del teorema de Pitágoras: a² = b² + c² = 3² + 4² = 25 → a = 5 cm

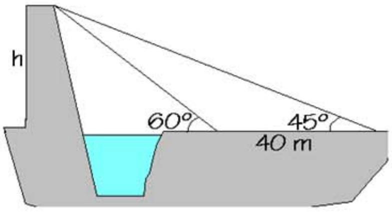
III) C = 90° – B = 90° – 27° = 63°. Por otro lado senB = $\frac{b}{a}$ ⇔ sen27° = $\frac{b}{5}$ ⇔ b = 5·sen27° ≅ 2,27 cm. Y senC = $\frac{c}{a}$ ⇔ sen63° = $\frac{c}{5}$ ⇔ c = 5·sen63° ≅ 4,46 cm.

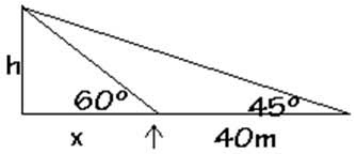
74. A una distancia de 20 metros del pie de un poste, se ve a éste bajo un ángulo de 60°. ¿Qué altura tiene el poste?

RESOLUCIÓN:

Tenemos un triángulo rectángulo formado por el poste, la línea del suelo horizontal, y la visual hasta la cúspide del poste. Por definición: tg60° = $\frac{h}{20}$ → h = 20·tg60° = 34,64 m.

75. Halla la altura de la muralla de la figura, para lo cual se ha tomado medidas de los ángulos indicados:





RESOLUCIÓN:

Podemos simplificar la situación en el esquema:

De manera que podemos observar dos triángulos rectángulos en los que podemos concretar la definición de las tangentes de los ángulos conocidos: tg60° $=\frac{h}{x}$ y tg45° $=\frac{h}{x+40}$. De esta forma, tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (h y x).

Como tg45° = 1, h = x + 40 → x = h – 40. Sustituimos en la otra ecuación:

$$h = x\cdot tg60° = (h - 40)tg60° \rightarrow h = \frac{40\cdot tg60°}{tg60°-1} \cong 96{,}64 \text{ m}$$

Si, en lugar de utilizar los datos concretos del problema, utilizamos letras, podemos obtener una fórmula que resuelva de manera genérica este tipo de cálculos de alturas de pie inaccesible. Así, en lugar de 60°, escribiremos α, en lugar de 45°, tomaremos β, en lugar de 40 m, marcaremos d. El sistema de ecuaciones será ahora: tg$\alpha = \frac{h}{x}$; tg$\beta = \frac{h}{x+d}$.

Resolviendo el sistema por igualación (despejando en ambas ecuaciones x), se obtiene un valor de h $= \frac{d\cdot tg\alpha\cdot tg\beta}{tg\alpha - tg\beta}$

76. Resuelve un triángulo del que se conocen: I) a = 3 cm, b = 6 cm y c = 4 cm
II) a = 10 cm, c = 4 cm y B = 45°
III) a = 8 m, b = 4 m y A = 60°
IV) a = 3 m, b = 6 m y A = 30°
V) a = 3 m, b = 4 m y A = 30°
VI) a = 3 m, b = 8 m y A = 30°
VII) a = 3 m, B = 27°, C = 35°

RESOLUCIÓN:

I) Se conocen los tres lados: Resolución del triángulo cuyos lados miden: a = 3 cm, b = 6 cm y c = 4 cm. Calculamos el ángulo opuesto al lado mayor aplicando el teorema del coseno (TC): $cosB = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{-11}{24} \cong -0{,}4583 \Longrightarrow B \cong 117°17'$ Triángulo obtusángulo. (Aunque ahora podríamos seguir aplicando el teorema del seno, conviene utilizar los valores que nos suministra el enunciado del problema para no hacer crecer el valor de los errores)

Análogamente: $cosA = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{43}{48} \cong 0{,}8958 \Longrightarrow A \cong 26°23'$

Y por último: C = 180° – (A + B) ≅ 36° 20'

II) Conocidos dos lados y el ángulo comprendido: a = 10 cm, c = 4 cm y el ángulo B = 45°

Por aplicación de (TC): $b = \sqrt{a^2+c^2-2ac\cdot cosB} \cong 7{,}71\ cm$

Seguimos con (TC): $cosA = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \cong -0{,}3983 \Longrightarrow A \cong 113°28'$

Y, por último: C = 180° – (A + B) ≅ 21°32'

En cambio, si se utiliza (TS) para calcular A: $senA = \frac{a\cdot senB}{b} \cong 0{,}9171 \Longrightarrow A \cong \begin{cases} 66°32' \\ 113°28' \end{cases}$

El primer valor 66°32' es el suministrado por la calculadora, y no corresponde a la solución correcta. No obstante puede proseguirse con el teorema del seno eligiendo los valores de A y C tales que A + B + C = 180°.

III) Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos: a = 8 m, b = 4 m y A = 60°.

A partir de (TS): $senB = \frac{b\cdot senA}{a} \cong 0{,}4330 \Longrightarrow B \cong \begin{cases} 25°40' \\ 154°20' \end{cases}$ Rechazamos el valor 154°20' porque A + B > 180°. Por tanto C = 180° – (A + B) ≅ 94°20'. El valor de c se obtiene de:

$c = \frac{a\cdot senC}{senA} \cong 9{,}21\ m$. O bien según (TC): $c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot cosC} \cong 9{,}21\ m$.

Es pues un caso de SOLUCIÓN ÚNICA.

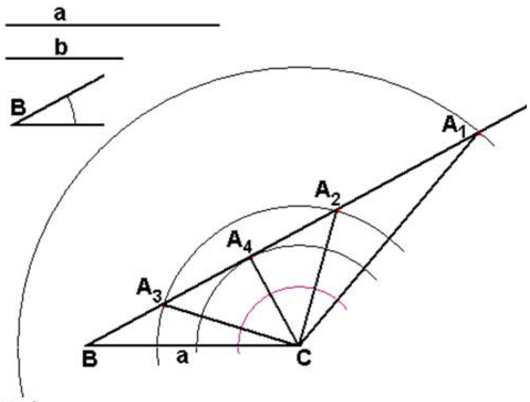
IV) Idem a = 3 m, b = 6 m y A = 30°.

A partir de (TS): $senB = \frac{b \cdot senA}{a} = 1 \Leftrightarrow B = 90°$

Y C = 180° – (A + B) = 60°

El valor 1 del senB nos determina de manera precisa que se trata de un triángulo rectángulo y por tanto es aplicable el teorema de Pitágoras (TP): $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{36 - 9} \cong 5{,}196\ m$

SOLUCIÓN ÚNICA.



V) Idem a = 3 m, b = 4 m y A = 30°.

Aplicando (TS) : $senB = \frac{b \cdot senA}{a} \cong 0{,}6667$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_1 \cong 41°49' \to C_1 = 180° - (A + B_1) \cong 108°11' \\ B_2 \cong 138°11 \to C_2 = 180° - (A + B_2) \cong 11°49' \end{cases}$$

Y con los valores correspondientes de los ángulos B y C, se obtendrán por nueva aplicación de (TS), las medidas correspondientes a c_1 = 5,7 m y c_2 = 1,23 m

VI) Idem a = 3 m, b = 8 m y A = 30°

Por aplicación de (TS) se tiene: $senB = \frac{b \cdot senA}{a} = \frac{4}{3} > 1$!! NO HAY SOLUCIÓN.

Se ha visto, pues, que el mismo proceso de resolución trigonométrica detecta en que situación de las cuatro posibles nos encontramos.

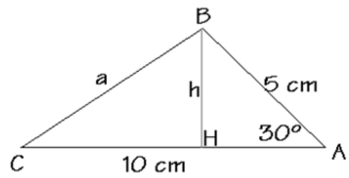
Otro posible camino consiste en comenzar aplicando el teorema del coseno (TC) para obtener b mediante una ecuación de segundo grado, pero es menos aconsejable porque exige más cálculos que, con datos aproximados en la mayoría de los casos, complicarían el control del error.

VII. Dados un lado y dos ángulos.

Según (SA) C = 180° – (A + B), y una vez que se conocen los tres ángulos y uno de los lados, los otros dos lados se obtienen por aplicación directa del teorema del seno.

77. De un triángulo se sabe que b = 10 cm, c = 5 cm y A = 30°. Calcula, al menos de dos formas distintas, su área.

RESOLUCIÓN: En principio, como no se advierte nada, se trata de un triángulo cualquiera (no tiene por qué ser rectángulo), de manera que podemos tomar como base cualquiera de sus lados, por ejemplo, el lado b.



(I) Área = ½ (base×altura) . Calculamos previamente la altura: en el triángulo HBA, sen30° = $\frac{h}{5}$ → h = 5·sen30° = 2,5 → Área = $\frac{10 \cdot 2{,}5}{2}$½ = 12,5 cm².

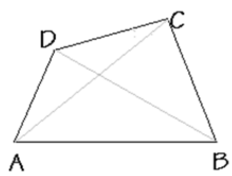
Esta forma conduce a la fórmula genérica: Área = ½ ·b·c·senA

(II) Calculamos el lado *a* mediante el teorema del coseno:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 100 + 25 - 100\cos 30° \cong 38{,}397$. Por tanto, a ≅ 6,20 cm. Y ahora aplicamos la fórmula de Herón: Área $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ donde p representa el semiperímetro del triángulo: p = $\frac{6{,}20+10+5}{2}$ = 10,6 → Área = $\sqrt{0{,}6 \cdot 4{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 5{,}6} \cong 12{,}5$ cm².

78. Calcula los ángulos de un cuadrilátero ABCD, cíclico (inscribible en una circunferencia), cuyos lados miden: AB = 7 cm, BC = 5 cm, CD = 6 cm y DA = 4 cm.

RESOLUCIÓN: Los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico son suplementarios. Por tanto A + C = B + D = 180°. Cualquiera de las diagonales divide al cuadrilátero en dos triángulos. Consideremos el triángulo ABC.



Aplicando el teorema del coseno: $|AC|^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos B$

Por otra parte, aplicando el mismo teorema al triángulo ADC: $|AC|^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos D$.

Pero como D = 180° – B, y cosD = cos(180° – B) = cosB, se obtiene la igualdad:

$5^2 + 7^2 - 2\cdot5\cdot7\cdot\cos B = 4^2 + 6^2 - 2\cdot4\cdot6\cdot\cos D \Leftrightarrow 74 - 70\cos B = 52 + 48\cos B \Rightarrow$

$\Rightarrow 118\cos B = 22 \Rightarrow B = \arccos(22/118) \cong 79°15' \Rightarrow D \cong 180° - 79°15' = 100°45'$

Si ahora tomamos como referencia la otra diagonal y aplicamos el teorema del coseno en los dos triángulos que determina:

$|BD|^2 = 5^2 + 6^2 - 2\cdot5\cdot6\cdot\cos C$ (En el triángulo BCD); $|BD|^2 = 4^2 + 7^2 - 2\cdot4\cdot7\cdot\cos A$ (En DAB).

Igualamos ambas expresiones: $61 - 60\cos C = 65 - 56\cos A$. Y como A = 180°– C,

$61 - 60\cos C = 65 + 56\cos C \Rightarrow -4 = 116\cos C \Rightarrow C \cong \arccos(-4/116) = 91°59'$.

Por tanto $A \cong 180° - 91°59' = 88°1'$

Evidentemente, el dibujo es sólo orientativo, no tiene por qué corresponderse en tamaños relativos con los datos.

GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA

79. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(1, 2) y B(3, –1). Calcula la pendiente y la ordenada en el origen. Expresa la ecuación en las formas paramétrica, continua, general, explícita, y canónica.

RESOLUCIÓN: Tomamos como vector director de la recta el vector $\overrightarrow{AB} = (3-1, -1-2) = (2, -3)$. Considerando cualquiera de los dos puntos conocidos de la recta, la FORMA PARAMÉTRICA viene dada por: $\begin{cases} x = x_1 + \lambda v_x \\ y = y_1 - \lambda v_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases}$.

Eliminando el parámetro, obtenemos la FORMA CONTINUA: $\frac{x-x_1}{v_x} = \frac{y-y_1}{v_y} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3}$

Teniendo en cuenta que producto de extremos = producto de medios: $-3(x-1) = 2(y-2)$. Efectuando operaciones y pasando todo a un miembro, se obtiene la FORMA GENERAL o IMPLÍCITA: $3x + 2y - 7 = 0$. Y si despejamos la y: $y = \frac{-3x+7}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$ que es la FORMA EXPLÍCITA. En esta forma, el coeficiente de la x es la pendiente: $m = -\frac{3}{2}$ y el término independiente es la ordenada en el origen: $n = \frac{7}{2}$.

La FORMA CANÓNICA es $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Para obtenerla, podemos partir de la forma general:

$3x + 2y - 7 = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y = 7 \Leftrightarrow$ (dividimos todo por 7) $\Leftrightarrow \frac{3x}{7} + \frac{2y}{7} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{7/3} + \frac{y}{7/2} = 1$.

Esta forma de la ecuación de la recta indica que corta a los ejes en $(\frac{7}{3}, 0)$ y $(0, \frac{7}{2})$

80. Averigua la posición relativa de los siguientes pares de rectas, indicando el punto de intersección en caso de ser secantes: a) r: 3x + 6y – 9 = 0; s: x + 2y – 7 = 0 b) r: x + y – 2 = 0; s: 3x – 4y = 0 c) r: 2x – y + 6 = 0; s: 2x + 2y + 4 = 0

RESOLUCIÓN: La posición relativa de dos rectas puede averiguarse comparando sus vectores característicos, formados por los coeficientes de x e y en la forma general:

$Ax + By + C = 0 \rightarrow v(A, B)$.

a) r: $3x + 6y - 9 = 0 \rightarrow v(3, 6)$ s: $x + 2y - 7 = 0 \rightarrow w(1, 2)$

Observamos que $v = 3w \Rightarrow$ tienen la misma dirección $\Rightarrow$ las rectas son PARALELAS: r//s

b) r: $x + y - 2 = 0 \rightarrow v(1, 1)$ s: $3x - 4y = 0 \rightarrow w(3, -4)$ $\nexists \alpha \in \mathbb{R} / v = \alpha w$. Por tanto v y w no tienen la misma dirección: las rectas son SECANTES. Para averiguar el punto en que se cortan, se resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones de las dos rectas: $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$ del que se obtiene la solución $(x, y) = (8/7, 6/7)$

c) r: $2x - y + 6 = 0 \rightarrow v(2, -1)$ s: $2x + 2y + 4 = 0 \rightarrow w(2, 2)$. Al igual que en el caso anterior, son SECANTES. Resolvemos el sistema $\begin{cases} 2x - y = -6 \\ x + 2y = -4 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-8/3, 2/3)$

81. Calcula la distancia entre los puntos: a) A(1, 2) y B(3, –1) b) C(–1, –1) y D(2, 3)

RESOLUCIÓN: La fórmula que nos da la distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es: $d(A, B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

a) $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{13} \cong 3'6$ u.
b) $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2-(-1))^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{25} = 5$ u.

82. Calcula el ángulo que forman entre sí los siguientes pares de rectas:
a) r: $3x - 2y + 8 = 0$; s: $2x + 5y - 7 = 0$ b) r: $2x - 3y + 4 = 0$; s: $3x + 2y + 6 = 0$
c) r: $x + y = -1$; s: $x - y + 2 = 0$ d) r: $y = 0$; s: $x - y = 0$

RESOLUCIÓN: Para hallar el ángulo entre dos rectas que vienen dadas en forma general, calculamos el ángulo que forman sus respectivos vectores característicos:

$$\cos(\widehat{\vec{v},\vec{w}}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|} = \frac{v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}\cdot\sqrt{w_x^2+w_y^2}}$$

a) r: $3x - 2y + 8 = 0 \rightarrow v(3, -2)$ s: $2x + 5y - 7 = 0 \rightarrow w(2, 5)$
Por tanto: $\varphi = \arccos\frac{3\cdot2+(-2)\cdot5}{\sqrt{3^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+5^2}} = \arccos\frac{-4}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{29}} \cong 101°53'$
b) r: $2x - 3y + 4 = 0 \rightarrow v(2, -3)$ s: $3x + 2y + 6 = 0 \rightarrow w(3, 2)$
Por tanto: $\varphi = \arccos\frac{2\cdot3+(-3)\cdot2}{\sqrt{2^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2}} = \arccos 0 = 90°$. Obsérvese que $v\cdot w = 0$
c) r: $x + y = -1 \rightarrow v(1, 1)$ s: $x - y + 2 = 0 \rightarrow w(1, -1)$. $v\cdot w = 0 \rightarrow r \perp s$ (ángulo 90°)
d) r: $y = 0 \rightarrow$ Eje de abscisas s: $x - y = 0 \rightarrow y = x \rightarrow$ bisectriz del 1er-3er cuadrantes. En este caso no hace falta hacer cálculos de ningún tipo: el ángulo que forman mide 45°

83. Los puntos A(3, 0) y B(0, 4) son dos vértices de un rombo cuyas diagonales se cortan en el origen de coordenadas. Calcula su perímetro, su área y los ángulos interiores.

RESOLUCIÓN: Es evidente que los otros dos vértices son C(–3, 0) y D(0, –4). d(A, B) = 5 u. Por tanto, el perímetro es 4·5 = 20 u.
El rombo queda dividido por sus diagonales en cuatro triángulos rectángulos, cada uno de los cuales tiene un área igual a ½ ·4·3 = 6 u^2 . Por tanto, el área del rombo mide 4·6 = 24 u^2.
La recta que une A y B tiene de ecuación (en forma canónica): $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \rightarrow y = -\frac{4}{3}x + 4$. Es decir, la pendiente mide $-\frac{4}{3}$ y por consiguiente, el ángulo que forma con el eje de abscisas es $\varphi = \text{arctg}(-\frac{4}{3}) \cong 126°52''$. Así que el ángulo entre AB y DA será A = 2·(180° – 126°52') = 106°16'. Y como los ángulos consecutivos de un rombo son suplementarios, obtenemos el ángulo B = 180° – 106°16' = 73°44'

84. Calcula el área de un hexágono regular centrado en el origen del que se conocen dos de sus vértices consecutivos: A(0, 1) y B($\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$).

RESOLUCIÓN:
Primero calculamos la longitud de un lado: d(A, B) = 1. Por tanto, el perímetro mide 6.
Hallamos la ecuación de la recta r que pasa por A y B: $\frac{x}{\sqrt{3}/2} = \frac{y-1}{-1/2} \Leftrightarrow x + \sqrt{3}y - \sqrt{3} = 0$.
Apotema = distancia del origen a esta recta = $d(O, r) = \frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|1\cdot0+\sqrt{3}\cdot0+\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3}/2)^2+(1/2)^2}} = \sqrt{3}$.
Área de un polígono regular = $\frac{perímetro \times apotema}{2}$ = $3\sqrt{3}$ u^2 (unidades de superficie)

85. Calcula la distancia entre las rectas r: x + y = 5 y s: x + y = –3.

RESOLUCIÓN: Sólo tiene sentido el ejercicio si las dos rectas dadas son paralelas, como es el caso. Calculamos la distancia del origen a cada una de las rectas: $d_1 = d(O, r) = \frac{-5}{\sqrt{2}}$; $d_2 = d(O, s) = \frac{3}{\sqrt{2}}$. La distancia entre las dos rectas será $d(r, s) = d_2 - d_1 = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ u.

Otra forma de resolución consiste en tomar un punto de r y calcular su distancia a s. Por ejemplo, si x = 0, y = 5: $d((0, 5), s) = \frac{|0+5+3|}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}\,u$.

86. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P(2, 4) y es perpendicular a la de ecuación x + 2y – 4 = 0.

RESOLUCIÓN:

1ª FORMA: Por ser perpendicular, su vector característico v(1, 2) debe ser paralelo a la recta dada. Así, conocido un vector director de la recta y un punto de la misma, utilizamos la forma continua: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2}$

2ª FORMA: Conocido el vector característico de la recta dada, v(1, 2), podemos obtener otro perpendicular a él sin más que cambiar de orden sus componentes y una de las dos de signo: w(2, –1) que será el vector característico de la recta buscada, de manera que su ecuación se obtiene: $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 \rightarrow 2(x - 2) - 1(y - 4) = 0 \rightarrow 2x - y = 0$

87. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P(2, 4) y es paralela a la recta de ecuación x + 2y – 4 = 0.

RESOLUCIÓN: Por ser paralelas, deben tener el mismo vector característico, así que la recta buscada debe tener una ecuación de la forma $x + 2y + C = 0$. Obligamos ahora a que pase por el punto P: $2 + 2\cdot 4 + C = 0 \rightarrow C = -10$. Así pues, la ecuación requerida es : $x + 2y - 10 = 0$.

88. Encuentra el punto C que divide el segmento AB de manera que una de las dos partes mide el doble que la otra, siendo C más próximo a A(2, 0) y el otro B(4, 6).

RESOLUCIÓN: Consideramos el vector $\overrightarrow{AB} = (2, 6)$. Y a partir de él, $\vec{v} = \frac{1}{3}(2, 6) = (\frac{2}{3}, 2)$

El punto C se obtiene por traslación de A mediante el vector $\vec{v}$: $C = (2, 0) + \left(\frac{2}{3}, 2\right) = (\frac{8}{3}, 2)$

89. Halla las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas: r: 4x + 3y = 0 y s: 5x – 12y = 7.

RESOLUCIÓN: Una bisectriz, además de dividir el ángulo en dos partes iguales, es el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia de las dos rectas. Por tanto, expresamos esta igualdad con un punto genérico X(x, y):

$$d(X, r) = d(X, s) \Leftrightarrow \frac{|4x+3y|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|5x-12y-7|}{\sqrt{5^2+12^2}} \Leftrightarrow \frac{|4x+3y|}{5} = \frac{|5x-12y-7|}{13}$$

Esta igualdad entre valores absolutos se interpreta como una doble igualdad:

O bien: [1] $13(4x + 3y) = 5\,(5x - 12y - 7)$ o bien: [2] $13(4x + 3y) = -5(5x - 12y - 7)$

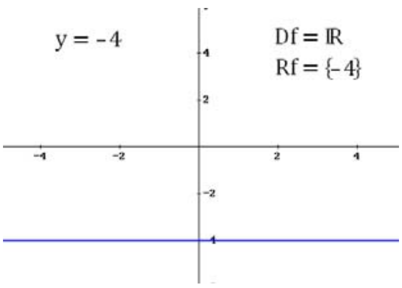
De [1] se tiene la ecuación de una de las bisectrices: $27x + 99y + 35 = 0$

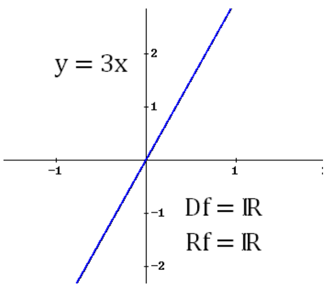
Y de [2] la de la otra: $77x - 21y - 35 = 0$. Evidentemente, ambas son perpendiculares.

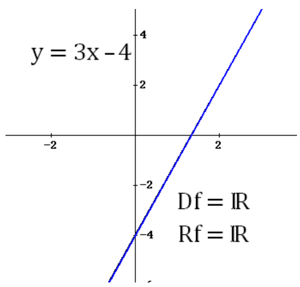
ANÁLISIS: FUNCIONES

90. Representa gráficamente la función y = ax + b, indicando su dominio y recorrido, en los siguientes casos: a) a = 0; b = –4 b) a = 3; b = 0 c) a = 3; b = –4

RESOLUCIÓN:

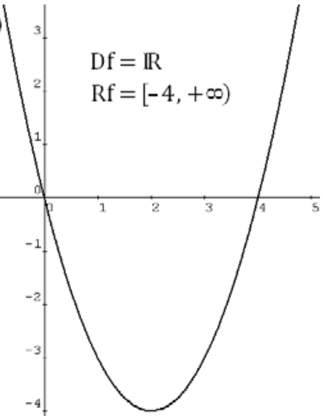




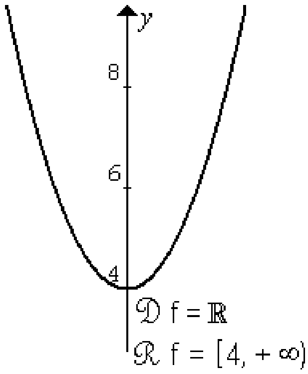


91. Representa gráficamente la función y = $ax^2 + bx + c$, (indicando su dominio y recorrido), en los casos: a) a = 1, b = –4, c = 0; b) a = 1, b = 0, c = 4; c) a = 1, b = –4, c = 4; d) a = 2, b = –5, c = 3

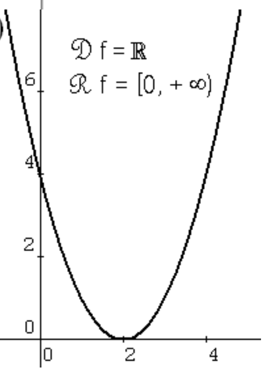
RESOLUCIÓN: En todos los casos es conveniente seguir los siguientes pasos:
1) averiguar los puntos de corte con el eje OX ($ax^2 + bx + c = 0$ y resolver la ec. de 2° grado)
2) localizar el vértice $V(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ y 3) ajustar con algún valor [pasa por (0, c)]

a)


a) $y = x^2 - 4x = x(x - 4)$
Corta al eje OX en (0, 0) y (4, 0).
El vértice está en (2, –4).
Corta al eje OY en (0, 0) (término independiente.)

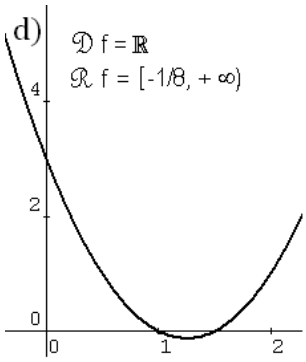
b)


b) $y = x^2 + 4 > 0$
No corta al eje OX.
Corta al OY en el punto (0, 4).
El vértice está en el punto (0, 4)

c)


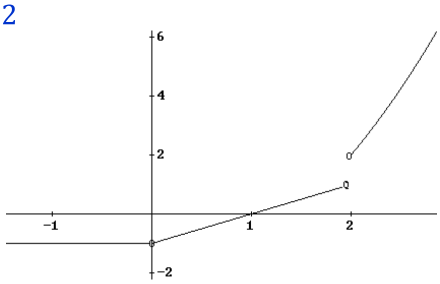
c) $y = x^2 - 4x + 4$
$x^2 - 4x + 4=0 \Leftrightarrow x_1 = x_2=2$.
Por tanto los dos puntos de corte coinciden (además con el vértice) en el punto (2, 0)

d) $y = 2x^2 - 5x + 3$
$2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1; x_2 = \frac{3}{2}$
Cortes con OX: (1, 0) y $(\frac{3}{2}, 0)$.
Con OY en (0, 3). Vértice en $(\frac{5}{4}, -\frac{1}{8})$

d)


92. Indica el dominio de la función f(x) = $\begin{cases} -1 & si \quad x < 0 \\ x - 1 & si \quad 0 < x < 2 \\ x^2 - 2 & si \quad x > 2 \end{cases}$; represéntala gráficamente y expresa su recorrido.

RESOLUCIÓN: La función está definida para x<0, 0<x<2 y x>2, y cada una de las definiciones son polinomios (que están definidos en todo ℝ). Por tanto sólo faltan los valores x = 0 y x =2. Luego Df = ℝ – {0, 2} Para ver su recorrido necesitamos saber: $f(0^+) = -1$; $f(2^-) = 1$ y $f(2^+) = 2$. Con estos datos Rf = (–1, 1]∪(2, + ∞).

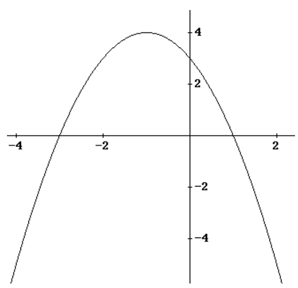


93. Considera las siguientes funciones:

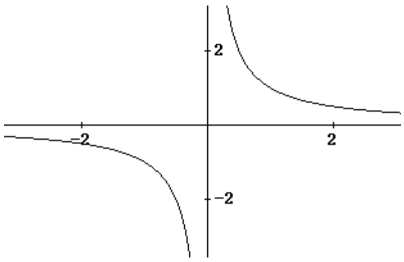
a) y = $3 - 2x - x^2$ b) y = $\frac{1}{x}$ c) y = $+\sqrt{x}$ d) y = |x| e) y = E(x) f) y = x – E(x) g) y = x^3.

Estudia en cada una de ellas, si son inyectivas y/o sobreyectivas, pares o impares, periódicas, acotadas, si tienen extremos relativos y/o absolutos. Expresa los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

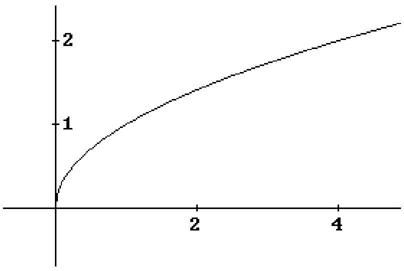
RESOLUCIÓN:



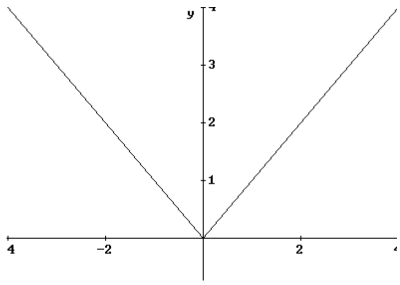
a) Función cuadrática. Df = ℝ. Cortes son OX: (–3, 0) y (1, 0). V(–1, 4) y con el coeficiente líder negativo: Rf = (–∞, 4]. No es inyectiva porque un mismo valor de y puede corresponder a dos de x. No es sobreyectiva porque no se alcanzan todos los valores reales. No es ni par ni impar ya que f(x) ≠ f(–x) ≠ –f(x). No es periódica (tiene dos ramas infinitas). Acotada superiormente con un máximo absoluto (y relativo) en (–1, 4). Crece en (–∞, –1). Decrece en (1, +∞). No es acotada inferiormente.



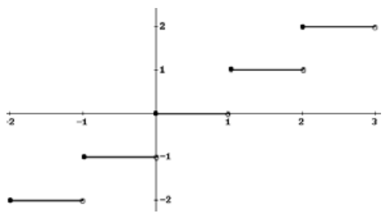
b) Función 'inversa' (hipérbola). Df $= \mathbb{R} - \{0\}$ ya que no se puede dividir por 0. Como es una fracción de numerador 1, es fácil ver que Rf $= \mathbb{R} - \{0\}$ (no corta el eje OX). Conforme aumenta x, la y disminuye: DECRECIENTE en todo su dominio. Observamos que f(–x) $= \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -$ f(x) → es IMPAR → gráfica simétrica respecto del origen. No es periódica (tiene 4 ramas infinitas) y no es acotada ni superior ni inferiormente. No tiene extremos. Es inyectiva y no sobreyectiva.



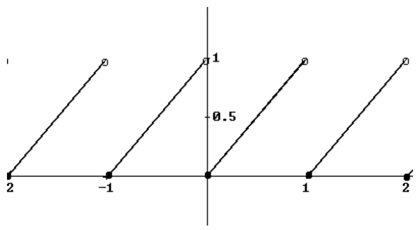
c) $y = +\sqrt{x}$. Por propia definición, es una función siempre no negativa. Así pues, Df = Rf $= [0, +\infty)$. Conforme mayor sea x, mayor es su raíz, y por tanto, es una función siempre CRECIENTE. No es periódica. Por la propia estructura del dominio no puede ser par ni impar. No está acotada superiormente, pero sí inferiormente por 0. Luego tiene un mínimo absoluto en (0, 0). Es inyectiva no sobreyectiva.



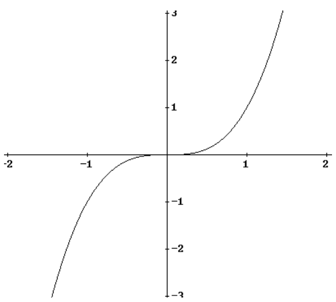
d) Por propia definición es una función siempre positiva. Df = $\mathbb{R}$, Rf $= [0, +\infty)$. Es una función par, ya que f(–x) = |–x| = |x| = f(x). Por tanto, su gráfica es simétrica respecto del eje OY. Con valores positivos, conforme mayor sea x, mayor será y. Luego, es creciente en $(0, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$. Tiene un mínimo absoluto (y relativo) en (0, 0). No está acotada superiormente y no es periódica. No es inyectiva ni sobreyectiva.



e) Función llamada 'parte entera'. Df = $\mathbb{R}$, Rf = $\mathbb{Z}$. No es inyectiva, ni sobreyectiva. Es una función escalonada: no tiene intervalos de crecimiento, sino que crece a saltos. No está acotada ni superior ni inferiormente. No tiene extremos. Por su estructura no puede ser par ni impar, ni periódica.



f) Función denominada parte decimal. Es obvio que Df = $\mathbb{R}$ y Rf $= [0, 1)$. Como la parte decimal se va repitiendo entre cada dos enteros, se trata de una función periódica de período p = 1. No es inyectiva ni sobreyectiva. Es siempre creciente. Está acotada inferiormente (≥ 0) y superiormente (< 1). Tiene infinitos mínimos absolutos en (k, 0), k$\in \mathbb{Z}$, pero no tiene máximos. Ni es par ni impar.



g) Función polinómica. Por tanto, Df = $\mathbb{R}$ = Rf. Como f(–x) = $(-x)^3 = -x^3$ = –f(x) se trata de una función impar: su gráfica es simétrica respecto del origen de cordenadas. Es inyectiva (valores distintos de y para valores distintos de x) y sobreyectiva (para cualquier y $\in \mathbb{R}$ siempre hay un valor de x tal que f(x) = y). Es siempre creciente ya que mientras mayor sea x, mayor será x^3. Luego ni tiene máximos ni mínimos ya que no está acotada. Como cualquier función polinómica no es periódica.

94. Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$, halla: a) f + g; b) f·g; c) f/g; d) f∘g; e) g∘f

RESOLUCIÓN: a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + x + 2$

b) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2 \cdot (x + 2) = x^3 + 2x^2$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x+2}$

d) $(f\circ g)(x) = f[g(x)] = f(x + 2) = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$
e) $(g\circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2) = x^2 + 2$

95. Halla la correspondencia inversa de las siguientes funciones indicando si son o no funciones: a) $f(x) = \frac{2x+4}{3}$ b) $f(x) = \frac{3x-2}{2x+3}$ c) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

RESOLUCIÓN:

a) $y = \frac{2x+4}{3} \Leftrightarrow 3y = 2x + 4 \Leftrightarrow 2x = 3y - 4 \Leftrightarrow x = \frac{3y-4}{2} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x-4}{2}$: SÍ es función.

b) $y = \frac{3x-2}{2x+3} \Leftrightarrow y(2x + 3) = 3x - 2 \Leftrightarrow 2xy + 3y = 3x - 2 \Leftrightarrow 3y + 2 = 3x - 2xy \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3y + 2 = x(3 - 2y) \Leftrightarrow x = \frac{3y+2}{3-2y} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{3-2x}$: SÍ es función.

c) $y = x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 - y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pm\sqrt{9-4(2-y)}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{4y+1}}{2} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{3\pm\sqrt{4x+1}}{2}$
NO es función porque para cada valor de x hay dos valores de y.

96. Comprueba con el apartado b) del ejercicio anterior que $f\circ f^{-1} = f^{-1}\circ f = i$ (función identidad)

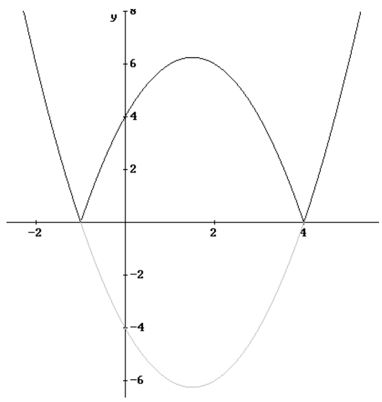
RESOLUCIÓN: La función identidad es $i(x) = x$

$$(f\circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = f\left(\frac{3x+2}{3-2x}\right) = \frac{3\frac{3x+2}{3-2x}-2}{2\frac{3x+2}{3-2x}+3} = \frac{3(3x+2)-2(3-2x)}{2(3x+2)+3(3-2x)} = \frac{13x}{13} = x$$

$$(f^{-1}\circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}\left(\frac{3x-2}{2x+3}\right) = \frac{3\frac{3x-2}{2x+3}+2}{3-2\frac{3x-2}{2x+3}} = \frac{3(3x-2)+2(2x+3)}{3(2x+3)-2(3x-2)} = \frac{13x}{x} = x$$

97. Estudia y representa la función $f(x) = |x^2 - 3x - 4|$

RESOLUCIÓN: Tomamos la función $g(x) = x^2 - 3x - 4$, que ya conocemos, que es una función cuadrática: $Df = \mathbb{R} = Rf$. No es inyectiva ni sobreyectiva. Corta al eje OX donde se verifica $x^2 - 3x - 4 = 0$, es decir, en $(-1, 0)$ y $(4, 0)$. Corta al eje OY en $(0, -4)$. Posee vértice en $(3/2, -25/4)$. La gráfica es, como sabemos, una parábola.



La función $f(x) = |x^2 - 3x - 4|$, convierte en positivos los valores negativos de la función g, que son los valores correspondientes al intervalo $(-1, 4)$ ya que el coeficiente líder es positivo. Por tanto, para representar gráficamente f(x) no hay más que tomar la parte positiva de g y reflejar simétricamente, respecto del eje OX, la parte negativa de g.

98. Estudia las funciones: a) $y = 2^x$ b) $y = (½)^x$ c) $y = 10^x$ d) $y = e^x$

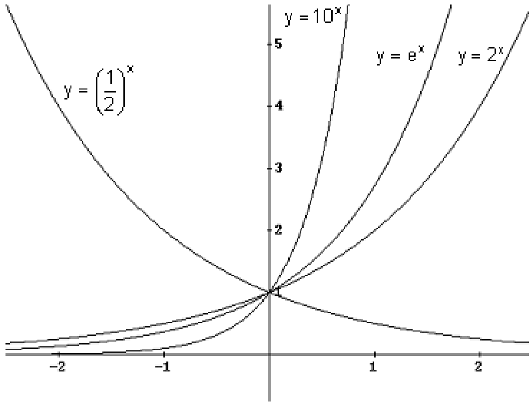
RESOLUCIÓN:

a) Df $= \mathbb{R}$. El resultado de calcular la exponencial (potencia de exponente real) es siempre un nº positivo. Por tanto Rf = $(0, +\infty)$. Siempre creciente. Cuando $x \to -\infty$, $y \to 0$ (asíntota). Pasa por (0, 1).

b) La diferencia con la anterior es únicamente que ahora la base es menor que 1 y $(½)^x = 1/2^x$. Por tanto, será una función decreciente que también pasa por (0, 1), y que cuando $x \to +\infty$, $y \to 0$ (asíntota).

c) Sólo se diferencia del caso a) en que al ser la base 10 > 2, la función crece más rápidamente, por lo que su gráfica se 'ajusta' más a los ejes.

d) Este caso es análogo a los a) y c). El número $e = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cong 2{,}7182818284590...$ está comprendido entre 2 y 10, por lo que esta gráfica estará comprendida entra las de 2^x y 10^x.

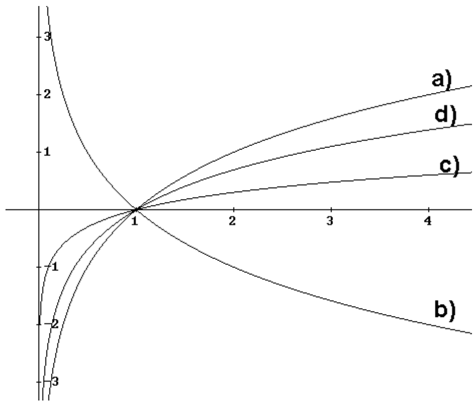


NOTA: Presión atmosférica: Es función exponencial de la altura: $p(h) = p(0)\cdot e^{-\frac{h}{a}}$, donde h se da en kilómetros, a = 8 Km.
Desintegración de la materia: $R(t) = R_0 e^{-kt}$

99. Estudia las funciones: a) $y = \log_2 x$ b) $y = \log_{½} x$ c) $y = \log x$ d) $y = \ln x$.

RESOLUCIÓN:

Estas funciones son las inversas de las del ejercicio anterior, por tanto, sus dominios y recorridos se intercambian: Df = $(0, +\infty)$; Rf = $\mathbb{R}$; y las gráficas son las simétricas de las anteriores respecto de la bisectriz del 1º-3º cuadrantes. Todas pasan por el punto (1, 0) y son crecientes las a, c y d y decreciente la b.



NOTA: Escala de Richter (1900 - 1985):

$M = \log A + C$

A = Amplitud de las ondas superficiales.

$C = 3{,}3 + 1{,}66\cdot\log D - \log T$

T = período de las ondas registradas en el sismógrafo.

D = distancia (en grados) desde el sismógrafo al epicentro.

100. Dada la función $f(x) = \log_2(x - 3)$, halla su dominio, su función inversa, y calcula $g \circ f$ siendo $g(x) = 2^x$.

RESOLUCIÓN:

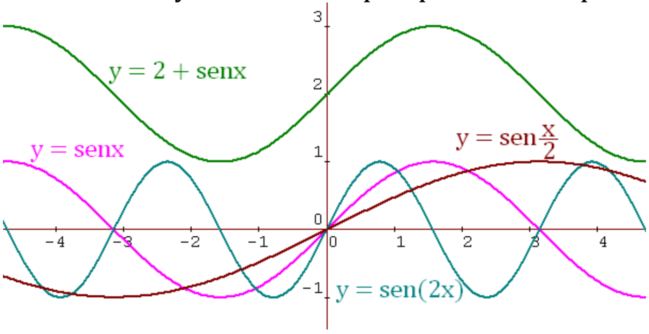
Df = $(3, +\infty)$ puesto que cualquier logaritmo sólo está definido para valores positivos.

$y = \log_2(x-3) \Leftrightarrow 2^y = x - 3 \Leftrightarrow x = 2^y + 3 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = 2^x + 3$

$g \circ f(x) = g[f(x)] = g[\log_2(x-3)] = 2^{\log_2(x-3)} = x - 3$

101. Estudia las funciones a) y = sen2x b) y = 2 + senx c) y = sen$\frac{x}{2}$

RESOLUCIÓN:
Partimos de y = senx. Es impar, periódica de periodicidad 2π; Df = $\mathbb{R}$; Rf = [–1, 1]



a) Multiplicar el argumento por 2 hace que el intervalo de periodicidad se reduzca a π, y esto produce un efecto en la gráfica de 'compresión'.
b) Sumar 2 produce un desplazamiento de la gráfica de senx 2 unidades hacia arriba, con lo que ahora Rf = [1, 3]
c) Dividir por 2 el argumento produce el efecto contrario que en el apartado a), por tanto, un 'estiramiento'

102. Escribe el dominio de la función y = $\frac{1}{\text{sen}2x}$

RESOLUCIÓN: Estudiamos para qué valores se anula el denominador: sen2x = 0 ⇔ 2x = kπ, k ∈ ℤ□⇔ x = $\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Como la función seno está definida para todos los valores reales, resultará que Df = $\mathbb{R} - \{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

103. Calcula la función compuesta g∘f, donde f(x) = arcsenx y a) g(x) = senx b) g(x) = cosx.

RESOLUCIÓN:
a) g∘f (x) = g[f(x)] = g[arcsenx] = sen[arcsenx] = x
b) g∘f (x) = g[f(x)] = g[arcsenx] = cos[arcsenx] = $\sqrt{1 - sen^2(arcsenx)} = \sqrt{1 - x^2}$

LÍMITES DE FUNCIONES

104. Calcula el límite de f(x) = x^2 + 3 en x = 1.

RESOLUCIÓN: Conforme vayamos tomando valores de x cercanos a 1 por la izquierda (x<1) y por la derecha (x>1), iremos viendo a que valor de y nos vamos aproximando, y éste valor será el límite.

f(0,9) = 3'81	f(0,99) = 3,9801	f(0,999) = 3,998001
f(1,01) = 4,0201	f(1,001) = 4,002001	f(1,0001) = 4,00020001

Parece obvio que el límite buscado es 4. No siempre debe caerse en la tentación de, simplemente, sustituir la x por el número al que tiende y calcular el correspondiente valor de la función. Como veremos en otros ejercicios, éste no tiene por qué ser el correcto valor del límite.

105. Calcula el límite de g(x) = $\begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ x + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en x = 2

RESOLUCIÓN:
Si α es un valor muy próximo a 2 por la izquierda (α < 2), g(α) = α^2 – 1 ≅ 3
Si α es un valor muy próximo a 2 por la derecha (α > 2), g(α) = α + 3 ≅ 5
Los resultados anteriores nos indican:
- No basta tomar valores próximos por defecto (límite por la izquierda: ℓ^-).
- No basta tomar valores próximos por exceso (límite por la derecha: ℓ^+)
- No tienen por qué coincidir estos valores ($\ell^- \neq \ell^+$ → No existe el límite)
- No tiene por qué coincidir el límite o los límites laterales con g(2) = 1

106. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si} \quad x < 2 \\ 4x - 7 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$, halla f(2) y sus límites laterales en ese punto.

RESOLUCIÓN: $f(2) = 4 \cdot 2 - 7 = 8 - 7 = 1$

$\ell^- = 1 \cong f(2^-)$ $\quad \ell^+ = 1 \cong f(2^+)$ $\quad \ell^- = \ell^+ = \ell = 1 = f(2) \rightarrow$ f es continua en x = 2

107. Halla razonadamente el dominio de continuidad de las funciones del ejercicio 93.

RESOLUCIÓN: Resolvemos el ejercicio atendiendo a las gráficas, que ya se han obtenido:

a) Se trata de una función polinómica que siempre es continua en $\mathbb{R}$

b) El valor x = 0 está excluido de Df porque en él no está definida la función → el dominio de continuidad es $\mathbb{R} - \{0\}$ (discontinuidad de salto infinito)

c) Es una función continua en todo su dominio: $[0, +\infty)$ (gráfica de trazo continuo)

d) Gráfica de trazo continuo: dos semirrectas con el mismo origen: continua en todo $\mathbb{R}$

e) Función escalonada: discontinuidades de salto finito → Dominio de continuidad: $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

f) Hay un salto en cada valor entero → Dominio de continuidad: $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

g) Nuevamente, se trata de una función polinómica (trazo continuo) → continua en $\mathbb{R}$

108. Determina el valor de k para que $f(x) = \begin{cases} x^3 + 5x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 3x + k & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ sea continua en x = 0

RESOLUCIÓN: Vemos si se cumplen las condiciones de continuidad en x = 0:

1°. ∃ f(0) = 0. Es decir: 0 ∈ Df

2° ∃ $\ell^- = k$; ∃ $\ell^+ = 0$. Luego para que se cumpla la 2ª condición de que exista el límite cuando x → 2, debe verificarse que $\ell^- = \ell^+ \rightarrow k = 0$.

3° $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

Por tanto, la función será continua en x = 0 si k = 0

109. Calcula los siguientes límites: a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 5x + 4}$ b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^3 - 5x + 4}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^5 - 5x + 3}{x^2 - 5x + 4}$ d) $\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 5x + 4}$ e) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2}\right)$

f) $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x-2}}$ g) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{\sqrt{x-2}}\right)$

RESOLUCIÓN:

a) $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 5x + 4} = \frac{+\infty}{+\infty}$ INDETERMINACIÓN que puede resolverse dividiendo numerador y denominador por x² (mayor potencia de x): $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}$. Los términos del numerador que están divididos por x o por x² tenderán a cero, por lo que $\ell = 2$. Como regla general, podemos deducir que $\lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n}{b_n}$

b) $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^3 - 5x + 4} = \frac{+\infty}{+\infty}$ INDETERMINACIÓN que también puede resolverse dividiendo numerador y denominador por x³ (mayor potencia de x): $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{1 - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^3}}$ Los términos del numerador que están divididos por x, x², x³ tenderán a cero, por lo que $\ell = \frac{0}{1} = 0$. Como regla general, si n < m: $\lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = 0$

c) $\ell = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^5 - 5x + 3}{x^2 - 5x + 4} = \frac{+\infty}{+\infty}$ INDETERMINACIÓN que también puede resolverse dividiendo numerador y denominador por x⁵ (mayor potencia de x): $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2 - \frac{5}{x^4} + \frac{3}{x^5}}{\frac{1}{x^3} - \frac{5}{x^4} + \frac{4}{x^5}}$

Los términos del numerador que están divididos por xⁿ, n > 0, tenderán a cero, por lo que $\ell = \frac{2}{0} = +\infty$. En general, si n > m: $\lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = signo\ \frac{a_n}{b_m} \infty$

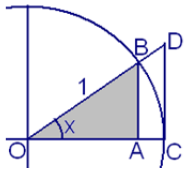
d) $\ell = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 5x + 4} =$ (sustituyendo x por 1) $= \frac{2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 3}{1^2 - 5 \cdot 1 + 4} = \frac{0}{0}$. INDETERMINACIÓN. Este tipo de indeterminaciones se resuelve factorizando numerador y denominador. El hecho de que ambos se anulen para x = 1 garantiza (teorema del resto) que tengan un factor común (x – 1): $\frac{2x^2-5x+3}{x^2-5x+4}=\frac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x-4)}=\frac{2x-3}{x-4}$. Por tanto: $\ell=\lim_{x\to 1}\frac{2x-3}{x-4}=\frac{2\cdot 1-3}{1-4}=\frac{1}{3}$

e) $\ell=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}\right)=$ $(+\infty)-(+\infty)$ INDETERMINACIÓN que se resuelve multiplicando y dividiendo por el conjugado de la expresión: $\ell=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2})\cdot(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+3})^2-(\sqrt{x-2})^2}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2})}=0$

f) $\ell^+=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{\sqrt{x-2}}\ell=$ (racionalizando) $=\lim_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0$. Pero el límite por la izquierda no existe ya que la raíz sólo está definida para valores no negativos. Por tanto se tiene que $\nexists\ell^-$; $\ell^+=0\rightarrow\nexists\ell$.

g) $\ell=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right)=$ (efectuando la resta) $=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1-\sqrt{x-2}}{x-2}\right)$ Cada vez que tengamos una raíz estaremos en una circunstancia análoga al caso anterior: $\nexists\ell^-$ porque la raíz sólo está definida para valores no negativos. $\ell^+=\frac{1-0}{0}=+\infty$. Por consiguiente, $\nexists\ell$.

110. Comprueba que y = $\frac{x}{senx}$ tiende a 1 cuando x tiende a cero.



RESOLUCIÓN: Sea x un ángulo del primer cuadrante (pequeño)

Observando la figura, tenemos que: senx = AB; cosx = OA; tgx = CD, y AD = OC = 1. Además:

Área triángulo OAB < Área sector circular OCB < Área triángulo OCD ⇔

⇔ ½ ·|OA|·|AB| < ½ x < ½ ·|OC|·|CD| (Área del sector = ½ ·ángulo en radianes·radio)

⇔ cosx· senx < x < tgx ⇔ cosx· senx < x < senx/cosx ⇔ (Dividiendo todo por senx que es una cantidad positiva por ser x un ángulo del primer cuadrante) ⇔ cosx < x/senx < 1/cosx. Y ahora tomemos límite cuando x→ 0: $\lim_{x\to 0}cosx\le\lim_{x\to 0}\frac{x}{senx}\le\lim_{x\to 0}\frac{1}{cox}$ (en el límite, el signo < se transforma en ≤), con lo que se tiene que $1\le\lim_{x\to 0}\frac{x}{senx}\le 1$, lo cual no deja más opción que $\lim_{x\to 0}\frac{x}{senx}=1$

DERIVADAS

111. Obtener, a partir de la definición, las derivadas de las siguientes funciones:
a) f(x) = 3, para x = 1; b) f(x) = x + 2 para x = 3 c) f(x) = x^2 para x = 3

RESOLUCIÓN: Recordemos que $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

a) $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{3-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0\rightarrow f'(1)=0$

b) $f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h+2)-(3+2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1\rightarrow f'(3)=1$

c) $f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-3^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(6+h)=6\rightarrow f'(3)=6$

112. Obtener, a partir de la definición, las funciones derivadas de las siguientes funciones:
a) f(x) = x^2 – 3 b) f(x) = $\sqrt{x-1}$ c) f(x) = senx

RESOLUCIÓN:

a) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-3-(x^2-3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)$
⇒ f ‘ (x) = 2x

b) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1}}{h}=$ (Para eliminar la indeterminación $\frac{0}{0}$ que se produce, multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del numerador) $=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})}{h(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1}}$
⇒ f ‘ (x) = $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

c) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-senx}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{senx\cdot cosh+senh\cdot cosx-senx}{h}=$
$=\lim_{h\to 0}\frac{senx(cosh-1)+senh\cdot cosx}{h}=senx\cdot\lim_{h\to 0}\frac{cosh-1}{h}+cosx\cdot\lim_{h\to 0}\frac{senh}{h}$. (*)

El término $\lim_{h\to 0}\frac{cosh-1}{h}$ produce una indeterminación $0/0$ que se resuelve como es habitual: $\lim_{h\to 0}\frac{cosh-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(cosh-1)(cosh+1)}{h(cosh+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{cos^2h-1}{h(cosh-1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-sen^2h}{h(cosh-1)}=$
$=\lim_{h\to 0}\frac{senh}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-senh}{cosh+1}=1\cdot 0=0$. Y, por otro lado, sabemos que $\lim_{h\to 0}\frac{senh}{h}=1$. Por tanto, sustituyendo en (*) se tiene que f ‘(x) = cosx

113. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 + \sqrt{x-1}$ b) $y = x^2senx$ c) y = tgx d) $y = cos^2x$ e) $y = Ln(sen\sqrt{x})$

RESOLUCIÓN:

a) Regla de la suma: (f ± g)’(x) = f ‘(x) ± g ’(x) → $y' = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

b) Regla del producto: (f·g)’(x) = f ‘(x)·g(x) + f(x)·g’(x) → $y' = 2x\cdot senx + x^2\cdot cosx$ →

→ y‘ = x(2senx + xcosx)

c) Regla del cociente: $(\frac{f}{g})'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$. Como $y = tgx = \frac{senx}{cosx}$ →

→ $y' = \frac{cosx\cdot cosx-senx\cdot(-senx)}{cos^2x}=\frac{cos^2x+sen^2x}{cos^2x}$ expresión que puede simplificarse de tres formas distintas y equivalentes y que conviene recordar: $y'=\frac{1}{cos^2x}=sec^2x = 1 + tg^2x$

d) Con la regla del producto: $y = cos^2x$ = cosx·cosx

y ‘ =(–senx)·cosx + cosx·(–senx)=–2senxcosx=– sen(2x)

O bien la regla de la cadena: (f∘g)’(x) = f ‘[g(x)]·g ’(x) → y ‘ = 2(cosx)·(–senx)

e) Nuevamente, la regla de la cadena, aquí más propiamente puesto que hay que encadenar su uso dos veces: si $v=\sqrt{x}$, $(v'=+\frac{1}{2\sqrt{x}})$ y u = senv, (u ‘ = cosv·v ’):

$y = Lnu \Rightarrow y' = \frac{1}{u}\cdot u'$ = (sustituyendo sucesivamente) $=\frac{1}{u}\cdot cosv\cdot v' = \frac{1}{sen\sqrt{x}}\cdot cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{cot\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

114. Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2 - 3x - 4$ en el punto cuya abscisa es x = 1.

RESOLUCIÓN:

Conocida la pendiente m de una recta y un punto (a, b) por el que pasa, la ecuación de la misma se obtiene mediante: y = m(x – a) + b. La derivada de una función en un punto nos da la pendiente de la recta tangente a la misma en dicho punto.

En nuestro ejemplo a = 1; $b = y(1) = 1^2 - 3\cdot 1 - 4 = -6$. y ‘ = 2x – 3 → m = y ‘(1) = 2·1 – 3 = –1. Por tanto, la ecuación de la recta será: y = –1(x – 1) – 6 ⇔ y = –x – 5 ⇔ x + y + 5 = 0

COMBINATORIA

115. Marta, Ana, Alicia, Antonio, Blas, Juan y Carlos son amigos aficionados al baile de salón. ¿De cuántas formas pueden emparejarse para practicar?

RESOLUCIÓN:

Este es un caso típico de la regla de la multiplicación. Si hay 4 chicos y 3 chicas, cada una de las chicas puede emparejarse con 4 chicos; por tanto, el número de parejas posible es $4 \times 3 = 12$ PAREJAS.

	Antonio	Blas	Juan	Carlos
Marta	(Antonio, Marta)	(Blas, Marta)	(Juan, Marta)	(Carlos, Marta)
Ana	(Antonio, Ana)	(Blas, Ana)	(Juan, Ana)	(Carlos, Ana)
Alicia	(Antonio, Alicia)	(Blas, Alicia)	(Juan, Alicia)	(Carlos, Alicia)

Esto se ve bien en el esquema adjunto del producto cartesiano chicos×chicas.

116. Se dispone de los dígitos 1, 3, 5, 7 y 9. ¿Cuántos números de 3 cifras distintas pueden formarse? ¿Cuántos acaban en 7? ¿Cuántos comienzan por 3? ¿Cuántos están comprendidos entre 500 y 800? Calcula la suma de todos los que pueden formarse.

RESOLUCIÓN:

Dos números serán distintos si contienen diferentes dígitos o, conteniendo los mismos, están colocados en distinto orden. Es decir, en estas formaciones influye ORDEN y ELEMENTOS. Por tanto estamos ante un caso de VARIACIONES. Como las cifras han de ser distintas, serán SIN REPETICIÓN: $V_3^5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ números, de los que acabarán por 7 tantos como acaben por 1, por 3, por 5 o por 9. Así pues $60/5 = 12$ números acabarán por 7. Por la misma razón, 12 números empezarán por 3.

Comprendidos entre 500 y 800 serán todos los que comiencen por 5 y 7. O sea, 24 números.

Para realizar la suma, los imaginados colocados unos sobre otros (en la disposición habitual de la suma) y veremos que al sumar las cifras de las unidades, tendremos que sumar 12 unos, 12 treses, 12 cincos, 12 sietes y 12 nueves. Luego la suma de las unidades será: $12 \cdot 1 + 12 \cdot 3 + 12 \cdot 5 + 12 \cdot 7 + 12 \cdot 9 = 12 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = 12 \cdot 25 = 300$. Con las cifras de las decenas se repetirá otra vez la misma situación (quizá en distinto orden) pero ahora sumamos decenas, es decir, el valor de cada dígito hay que multiplicarlo por 10. Por tanto, las decenas sumarán $300 \cdot 10 = 3000$. Y análogamente ocurrirá con las centenas: $300 \cdot 100 = 30000$. Con lo que la suma de todos los 60 números es: 33300.

117. Con los mismos dígitos del ejercicio anterior, ¿cuántos números de tres cifras, repetidas o no, pueden formarse?

RESOLUCIÓN: Si ahora se pueden repetir las cifras, se tratará de calcular las VARIACIONES CON REPETICIÓN de 5 elementos tomados de 3 en 3: $VR_3^5 = 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ números.

118. Cuatro atletas participan en una carrera. ¿cuántas clasificaciones distintas pueden darse?

RESOLUCIÓN:

Se trata de ver cuántas ordenaciones posibles pueden hacerse con 4 elementos. Siempre intervienen los mismos elementos, sólo hay que tener en cuenta el ORDEN.

Por tanto estamos en un caso de PERMUTACIONES: $P_4 = 4! = 24$ clasificaciones distintas.

119. ¿De cuantas maneras pueden sentarse alrededor de una mesa circular seis comensales?

RESOLUCIÓN:

Mencionar 'mesa circular' quiere hacer destacar que hay que tomar uno de los elementos como referencia, ya que al girar, puede que no se altere la posición relativa de los elementos y no distinguirse una nueva permutación. Este tipo de ordenaciones se llama PERMUTACIONES CIRCULARES y $PC_n = (n-1)! = (6-1)! = 5! = 120$ maneras

120. Cambiando el orden de las letras de la palabra CARRETERA, ¿cuántas palabras pueden formarse?

RESOLUCIÓN:

El propio enunciado establece que se trata de ordenaciones diferentes de los mismos elementos, sólo que ahora, hay elementos que se repiten y la permutación entre ellos no introduce una nueva ordenación. Estamos ante un caso de PERMUTACIONES CON REPETICIÓN. El número total de elementos es 9, de los cuales la A se repite 2 veces, la R, 3 veces y la E otras 2 veces: $PR^{9}_{2,3,2} = \frac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 2!} = 15120$ palabras distintas.

121. De un grupo de 20 chicas se quiere formar un equipo de baloncesto (5 jugadoras). ¿De cuántas maneras se puede hacer la elección?

RESOLUCIÓN:

Suponemos que no distinguimos en que puesto juega cada jugadora. En tal caso, dos equipos sólo se diferenciarán en las chicas que entren a formar parte de él, y NO en el ORDEN. Esto quiere decir que estamos ante un caso de COMBINACIONES (siempre que se trate de formar subconjuntos de un conjunto dado): Así pues: $C^{20}_{5} = \binom{20}{5} = 15504$ maneras de hacer la selección (¡como para que siempre jueguen las mismas!)

122. Lanzamos tres dados indistinguibles. ¿cuántos resultados posibles podemos obtener?

RESOLUCIÓN:

Observamos que, al ser indistinguibles los dados, para nosotros, el resultado 112, 121 o 211 son en realidad el mismo, es decir, no interviene el orden en que aparecen las puntuaciones de cada dado. Cuando no interviene el orden, estamos en un caso de COMBINACIONES, pero como pueden repetirse los elementos, estamos en un caso de COMBINACIONES CON REPETICIÓN: $CR^{6}_{3} = C^{6+3-1}_{3} = C^{8}_{3} = \binom{8}{3} = 56$ resultados posibles.

Algunos autores prefieren NO hablar de combinaciones con repetición. En realidad, podemos hacer los cálculos eludiendo este concepto: Si se repite la puntuación en los tres dados, tenemos 6 resultados posibles. Si se repite en dos dados la puntuación (112, 113, 114, 115, 116, 221, 223,….) tenemos 5·6 = 30 resultados posibles. Y si no se repite la puntuación en ninguno de los tres dados, los resultados serían C^{6}_{3}=20. De manera que sumando: 6 + 30 + 20 = 56 resultados

123. Existen cuatro clases de nucleótidos caracterizados cada uno por su base orgánica: adenina, guanina, citosina y timina (ADN) o uracilo (ARN). Cada cadena de nucleótidos produce un ácido nucleico y las mismas bases dispuestas en diferente orden producen ácidos nucleicos o polinucleótidos diferentes. ¿Cuántos polinucleótidos pueden formarse con seis nucleótidos de modo que en ellos figuren las cuatro bases?

RESOLUCIÓN:

Como tienen que intervenir las cuatro bases, de los seis nucleótidos, habrán de repetirse algunos de ellos. Sólo caben dos posibilidades; o uno se repite tres veces, o dos de ellos se repiten dos veces. En el primer caso, estamos ante un esquema del tipo AAABCD, y se tratará de establecer el número de ordenaciones posibles de este esquema, es decir, $PR^{6}_{3,1,1,1}$= 120 ordenaciones por cada una de las letras que pueden repetirse, por tanto, 120×4 = 480 polinucleótidos del primer tipo. En el segundo caso, el esquema es AABBCD, es decir, $PR^{6}_{2,2,1,1}$= 180 ordenaciones por cada una de las elecciones posibles de las dos letras que se repiten, es decir $C^{4}_{2} = 6$; por tanto, 180×6 = 1080 polinucleótidos del segundo tipo. Luego en total, serán 480 + 1080 = 1560 polinucleótidos.

124. Calcula $(3 + 2x)^5$. (Fórmula del binomio de Newton)

RESOLUCIÓN: $(3+2x)^5 = \sum_{h=0}^{h=6}\binom{6}{h}3^{6-h}(2x)^h = \binom{6}{0}3^{6}(2x)^0 + \binom{6}{1}3^{6-1}(2x)^1 + \binom{6}{2}3^{6-2}(2x)^2 + \binom{6}{3}3^{6-3}(2x)^3 + \binom{6}{4}3^{6-4}(2x)^4 + \binom{6}{5}3^{6-5}(2x)^5 + \binom{6}{6}3^{6-6}(2x)^6 =$

$= 1\cdot 3^{6}\cdot(2x)^0 + 6\cdot 3^5(2x)^1 + 6\cdot 3^4(2x)^2 + 6\cdot 3^3(2x)^3 + 6\cdot 3^2(2x)^4 + 6\cdot 3^1(2x)^5 + 6\cdot 3^0(2x)^6 =$

$= 729 + 2916x + 4860x^2 + 4320x^3 + 2160x^4 + 192x^5 + 64x^6$

125. ¿Cuál es el término del desarrollo de $(2x - 3x^3)^7$ en el que aparece x^{15}.

RESOLUCIÓN:

El término general del desarrollo es de la forma $\binom{7}{h}(2x)^{7-h}(3x^3)^h =$

$= \binom{7}{h} 2^{7-h} \cdot x^{7-h} \cdot 3^h \cdot x^{3h} = \binom{7}{h} 2^{7-h} \cdot 3^h \cdot x^{7+2h} = (*)$.

Por tanto $x^{7+2h} = x^{15}$ → $7 + 2h = 15$ → $h = 4$. Sustituimos ahora en (*):

$\binom{7}{4} 2^{7-4} \cdot 3^4 \cdot x^{7+2\cdot 4} = 35 \cdot 2^3 \cdot 3^4 \cdot x^{15} = 22680x^{15}$.

ESTADÍSTICA

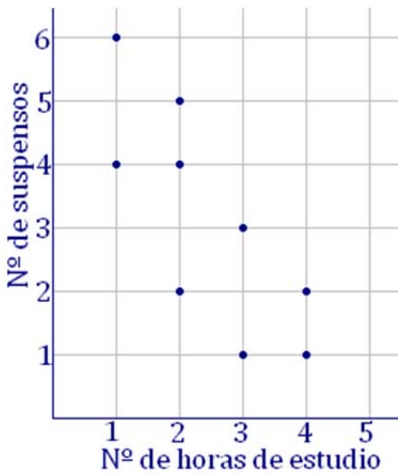
126. Parece natural plantearse si el número de suspensos tiene que ver con el número de horas al día que dedicamos al estudio. Con intención de respaldar, o refutar, de manera seria las ideas previas que tenemos al respecto se ha realizado una encuesta con los siguientes resultados:

Horas de estudio	4	2	2	2	3	3	1	2	4	2	0	4	4	3	1	3
Suspensos	2	0	4	5	1	1	6	2	1	0	6	1	0	0	4	3

Considera cada pareja de valores como las coordenadas de un punto en el plano y haz una representación de la nube de puntos. A simple vista, ¿parece que haya relación? Dispón los datos en una tabla de distribución y calcula los estadísticos necesarios para ver la regresión y la correlación.

RESOLUCIÓN:

(x_i, y_i)	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
(4, 2)	4	2	8	16	4	2,25	0,0625
(2, 0)	2	0	0	4	0	0,25	5,0625
(2, 4)	2	4	8	4	16	0,25	3,0625
(2, 5)	2	5	10	4	25	0,25	7,5625
(3, 1)	3	1	3	9	1	0,25	1,5625
(3, 1)	3	1	3	9	1	0,25	1,5625
(1, 6)	1	6	6	1	36	2,25	14,0625
(2, 2)	2	2	4	4	4	0,25	0,0625
(4, 1)	4	1	4	16	1	2,25	1,5625
(2, 0)	2	0	0	4	0	0,25	5,0625
(0, 6)	0	6	0	0	36	6,25	14,0625
(4, 1)	4	1	4	16	1	2,25	1,5625
(4, 0)	4	0	0	16	0	2,25	5,0625
(3, 0)	3	0	0	9	0	0,25	5,0625
(1, 4)	1	4	4	1	16	2,25	3,0625
(3, 3)	3	3	9	9	9	0,25	0,5625
	40	36	63	122	150	22,00	69,000



Observamos en el gráfico que la nube de puntos no está excesivamente dispersa, sino que se alarga de manera oblicua que parece ajustarse a la dirección de una recta de pendiente negativa. Hemos dispuesto en la tabla los datos ordenados de manera que nos faciliten el cálculo de los parámetros correspondientes. La última fila (sombreada) nos indica la suma de los valores de cada columna, de manera que, entonces: $\bar{x} = \frac{40}{16} = 2,5$ y : $\bar{y} = \frac{36}{16} = 2,25$, valores que hemos utilizado en la formación de las dos últimas columnas.

Pasamos ahora a calcular el resto de los parámetros necesarios: $\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum(x_i - \bar{x})^2 f_i =$ (penúltima columna) $= \frac{22}{16} = 1,375$ → $\sigma_x \cong 1,17$. De la misma forma: $\sigma_y^2 = \frac{1}{N}\sum(y_i - \bar{y})^2 f_i =$ (última columna) $= \frac{69}{16} = = 4,3125$ → $\sigma_y \cong 2,08$.

Y, por último: $\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum x_i y_i f_i - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{63}{16} - 2,5 \cdot 2,25 = -1,6875 \cong -1,69$.

Hallamos ahora las ecuaciones de las rectas de regresión:

De y sobre x: $y - 2,25 = -\frac{1,69}{1,375}(x - 2,5) \rightarrow y = -1,23x + 5,32$

De x sobre y: $x - 2,5 = -\frac{1,69}{4,3125}(y - 2,25) \rightarrow x = -0,39y + 3,38$

Obsérvese que las pendientes de las rectas de regresión son negativas, como apuntábamos al principio. Esto quiere decir que la posible relación existente entre ambas variables es inversa (a más horas de estudio, menos suspensos). Veamos, por fin, el coeficiente de correlación: $r = \pm\sqrt{\frac{m_y}{m_x}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = -0,69$ (colocamos el signo negativo cuando las dos pendientes de las rectas de regresión son negativas). Este valor es razonablemente alto, (suficientemente próximo a 1) como para afirmar que existe una relación fuerte entre las dos variables.

127. Lanzamos dos dados y anotamos la suma de los puntos de las caras superiores. Construir el espacio muestral del experimento. Forma los sucesos siguientes y calcula su probabilidad: a) Obtener suma igual a 8; b) Obtener suma menor o igual a 4.

RESOLUCIÓN:

E = {1+1, 1+2, 2+1, 1+3, 3+1, 1+4, 4+1, 1+5, 5+1, 1+6, 6+1, 2+2, 2+3, 3+2, 2+4, 4+2, 2+5, 5+2, 2+6, 6+2, 3+3, 3+4, 4+3, 3+5, 5+3, 3+6, 6+3, 4+4, 4+5, 5+4, 4+6, 6+4, 5+5, 5+6, 6+5, 6+6}. Card(E) = 36

a) A = {2+6, 6+2, 3+5, 5+3, 4+4}. Card(A) = 5. Por tanto p(A) = 5/36 ≅ 0,139

b) B = {1+1, 1+2, 2+1, 2+2, 1+3, 3+1}. Card(B) = 6. Por tanto p(B) = 6/36 = 1/6 ≅ 0,167

128. Halla la probabilidad de que al lanzar tres monedas se obtenga al menos una cara.

RESOLUCIÓN:

E = {CCC, CCX, CXC, XCC, XXC, XCX, CXX, XXX}. Card(E) = 8. (Es evidente que no es necesario formar el conjunto E para saber que card(E) = 8: Se trata de las variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 3 en 3: $2^3 = 8$).

Cuando se nos pide el suceso 'al menos una' suele ser más fácil utilizar el suceso complementario: Si A = 'Salir al menos una cara', entonces, el complementario es Â = 'No salga ninguna cara'. Es obvio que $p(\hat{A}) = \frac{1}{8} = 0,125$. Por tanto, $p(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0,875$.

129. Lanzamos un dado al aire. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos: a) que salga un número primo; b) que salga un número par, c) que salga un número primo o par, d) que salga un número impar y primo.

RESOLUCIÓN: E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

a) 'Salir un número primo' = A = {2, 3, 5}. Por tanto, $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$

b) 'Salir número par' = B = {2, 4, 6}. Por tanto, $p(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$

c) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, ya que $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$ puesto que el único primo par es el 2.

d) $p(A \cap \overline{B}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, puesto que $A \cap \overline{B} = \{3, 5\}$

130. De una bolsa que contiene nueve bolas rojas y cinco negras se extraen sucesivamente dos bolas. Hallar la probabilidad de los siguientes sucesos: a) que la primera sea roja y la segunda negra; b) que sea una roja y otra negra.

RESOLUCIÓN: Este es un ejemplo de problema de probabilidad condicionada.

a) $p(1^aR \cap 2^aN) = p(1^aR) \cdot p(2^aN/1^aR) = \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{45}{182} \cong 0,25$

b) Definimos los siguientes sucesos: A: La 1ª bola sea roja; B: La 1ª bola sea negra; C: La 2ª bola sea roja; D: la 2ª bola sea negra. Entonces, lo que tenemos que calcular es:

$p[(A \cap D) \cup (B \cap C)] = p(A \cap D) + p(B \cap C) = p(A) \cdot p(D/A) + p(B) \cdot p(C/B) =$

$= \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} + \frac{5}{14} \cdot \frac{9}{13} = \frac{90}{182} \cong 0,495$

131. Debido a un defecto de fabricación, una máquina detectora de billetes falsos los detecta en un 90% de los casos, pero determina como falsos un 1% de los billetes auténticos. Un falsificador ha intercalado 5 billetes falsos de 20 € con otros 95 billetes auténticos. Tomamos al azar un billete de este fajo de 100. ¿Cuál es la probabilidad de que la máquina lo detecte como falso?

RESOLUCIÓN: Este es un caso de aplicación del teorema de la probabilidad total

Sean los siguientes sucesos:

S = Ser un billete falso→ p(S) = 5/100 = 0,05

N = No ser billete falso → p(N) = 95/100 = 0,95

F = Ser detectado como falso → p(F/S) = 0,9 y p(F/N) = 0,01

Así: p(F) = p(S)·p(F/S) + p(N)·P(F/N) = 0’05·0’9 + 0’95·0’01 = 0’045 + 0’0095 = 0’0545

132. En un cajón hay 12 caramelos de menta y 8 de fresa. Si tomamos un caramelo y sin mirarlo lo guardamos, y tomamos un segundo y es de menta, ¿cuál es la probabilidad de que el primero que guardamos fuese de menta?

RESOLUCIÓN:

Estamos ante un caso típico de aplicación de la fórmula de Bayes: $p(A_k/B) = \frac{p(A_k)\cdot p(B/A_k)}{\sum p(A_i)\cdot p(B/A_i)}$

Sea A1 = Caramelo 1° sea de menta; A2 = Caramelo 1° sea de fresa; B = Caramelo 2° sea de menta. Entonces: $p(A_1/B) = \frac{p(A_1)\cdot p(B/A_1)}{p(A_1)\cdot p(B/A_1)+p(A_2)\cdot p(B/A_2)} = \frac{\frac{12}{20}\cdot\frac{11}{19}}{\frac{12}{20}\cdot\frac{11}{19}+\frac{8}{20}\cdot\frac{12}{19}} = \frac{11}{19} \cong 0{,}58$

133. Debido a las irregularidades naturales de la materia, de cada 100 botones de nácar que se fabrican en una industria, 5 resultan inservibles. Se envasan en retráctiles de 10 botones. Calcular la probabilidad de que al elegir un envase al azar, a) no haya ningún botón defectuoso; b) haya más de 6; c) sean todos defectuosos.

RESOLUCIÓN:

Se trata de una distribución binomial puesto que solo se presentan dos resultados: ser defectuoso o no serlo. Los parámetros son n = 10 (unidades de cada envase), $p = \frac{5}{100} = 0{,}05$:

a) $p(x = 0) = \binom{10}{0}0{,}05^0\cdot 0{,}95^{10} \cong 0{,}5987$

b) $p(x > 6) = p(x = 7) + p(x = 8) + p(x = 9) + p(x = 10) =$

$= \binom{10}{7}0{,}05^7\cdot 0{,}95^3 + \binom{10}{8}0{,}05^8\cdot 0{,}95^2 + \binom{10}{9}0{,}05^9\cdot 0{,}95^1 + \binom{10}{10}0{,}05^{10}\cdot 0{,}95^0$

El resultado de estas operaciones da un número con la primera cifra significativa en el lugar de las milmillonésimas; por tanto, la probabilidad es prácticamente nula.

c) $p(x=10) = \binom{10}{10}0{,}05^{10}\cdot 0{,}95^0 \cong 0$

134. Calcula la media y desviación típica de las siguientes distribuciones binomiales:

$B(4; \frac{1}{10})$ $B(9; 0{,}4)$ $B(100; \frac{9}{10})$

RESOLUCIÓN:

En una distribución B(n, p), la media es μ = np, y la desviación típica es $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Por tanto,

$B(4; \frac{1}{10})$ $\mu = 4\cdot 0{,}1 = 0{,}4$ $\sigma = \sqrt{4\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9} = 0{,}6$

$B(9; 0{,}4)$ $\mu = 9\cdot 0{,}4 = 3{,}6$ $\sigma = \sqrt{9\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6} \cong 1'47$

$B(100; \frac{9}{10})$ $\mu = 100\cdot 0{,}9 = 90$ $\sigma = \sqrt{100\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1} = 3$

135. En una distribución N(0; 1), calcula: $p(x \leq 1{,}53)$; $p(x < 2{,}17)$; $p(x \geq 0{,}77)$; $p(x \leq 1{,}16)$; $p(x \leq -0{,}68)$; $p(x < -1{,}33)$; $p(0{,}63 \leq x \leq 1{,}71)$; $p(-2{,}14 \leq x \leq -0{,}86)$; $p(-1{,}2 \leq x \leq 0{,}67)$

RESOLUCIÓN:

$p(x \leq 1{,}53) = (\text{tabla fila } 1{,}5, \text{ columna } 3) = 0{,}9370$

$p(x < 2{,}17) = (\text{tabla fila } 2{,}1, \text{ columna } 7) = 0{,}9850$

$p(x \geq 0{,}77) = 1 - p(x < 0{,}77) = 1 - 0{,}7794 = 0{,}2206$

$p(x \leq 1{,}16) = (\text{tabla fila } 1{,}1, \text{ columna } 6) = 0{,}8770$

$p(x \leq -0{,}68) = 1 - p(x \leq 0{,}68) = 1 - 0{,}7517 = 0{,}2483$

$p(x < -1{,}33) = 1 - p(x < 1{,}33) = 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$

$p(0{,}63 \leq x \leq 1{,}71) = p(x \leq 1{,}71) - p(x \leq 0{,}63) = 0{,}9564 - 0{,}7357 = 0{,}2207$

$p(-2{,}14 \leq x \leq -0{,}86) = p(x \leq 2{,}14) - p(x \leq 0{,}86) = 0{,}9838 - 0{,}8051$

$p(-1{,}2 \leq x \leq 0{,}67) = p(x < 0{,}67) - [1 - p(x \leq 1{,}2)] = p(x < 0{,}67) + p(x \leq 1{,}2) - 1 =$
$= 0{,}7486 + 0{,}8849 - 1 = 0{,}6380$

136. Una empresa produce lámparas con una duración en horas que sigue una N(100; 20). ¿Qué porcentaje de lámparas es de esperar que tengan una vida superior a las 80 horas?. ¿Cuál será la duración mínima del 90% de las lámparas?

RESOLUCIÓN:

$p(x > 80) = (\text{tipificación}) = p(\frac{x-100}{20} > \frac{80-100}{20}) = p(z > -1) = p(z < 1) = 0{,}8413 \rightarrow 84{,}13\%$ de lámparas con vida superior a 80 horas.

$p(x > t) = 0{,}9 \rightarrow 0{,}9 = p(z > -t') \rightarrow p(z < t') = 0{,}9 \rightarrow t' = 1{,}28 \rightarrow \frac{t-100}{20} = -1{,}28 \rightarrow t \cong 74{,}4$ horas

137. Una empresa tiene 1000 empleados. La probabilidad de que un empleado no asista un día es 0,02. Calcula la probabilidad de que un día falten más de cuatro.

RESOLUCIÓN:

Se trata de una distribución binomial con $n = 1000$ y $p = 0{,}02$. Como n es muy elevado y $np = 20 > 5$, estamos en condiciones de aproximar por una $N(np; \sqrt{np(1-p)}) = N(20; 4{,}42)$:

$p(x > 4) \cong (\text{corrección de Yates}) \cong p(x \geq 4{,}5) = p(z \geq \frac{4{,}5-20}{4{,}42}) = p(z \geq -3{,}51) \cong 1 - 0{,}9998 \cong 0{,}0002$

138. Las encuestas señalan que sólo un 25% de los habitantes de una ciudad leen la prensa. Calcula la probabilidad de que al preguntarle a siete personas por lo menos tres de ellas lean la prensa.

RESOLUCIÓN:

Se trata de una distribución binomial con $n = 7$, $p = 0{,}25 \rightarrow 1 - p = 0{,}75$

$p(x \geq 3) = 1 - p(x < 3) = 1 - p(x = 0) - p(x = 1) - p(x = 2) = (\text{tablas}) =$
$= 1 - 0{,}1335 - 0{,}3115 - 0{,}3115 = 0{,}2435$