2

ACTIVIDADES RESUELTAS

MATRICES

1. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, calcular 3·A + B + C; 2·B - C; 2·C + A.

$$3\cdot A + B + C = 3\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 4 \\ -6 & 8 & 21 \end{bmatrix}$$

$$2\cdot B - C = 2\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -6 & 8 & 16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 2 \\ -6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$2\cdot C + A = 2\cdot\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 4 \\ 0 & 2 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 4 \\ -1 & 3 & 16 \end{bmatrix}$$

2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, calcula:

a) (–2·A) b) 3·(A + B) c) ((–7) + 4)·(B + A) d) La matriz opuesta de B.

a) $$-2\cdot A = -2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 6 & -2 & -14 \\ 0 & -8 & -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $$3\cdot(A+B) = 3\cdot\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}\right) = 3\cdot\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 8 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 & 6 & 24 & 18 \\ 3 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

c) $$((-7)+4)\cdot(B+A) = (-3)\cdot(A+B) = \begin{bmatrix} -9 & -15 & -6 & -24 & -18 \\ -3 & -9 & -9 & -9 & -9 \end{bmatrix}$$

d) $$-B = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -5 & -7 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

3. Calcular el producto de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot(-2)+2\cdot(1)+0\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot(-1)+0\cdot0 \\ 0\cdot(-1)+0\cdot1+0\cdot0 & 0\cdot(-2)+0\cdot1+1\cdot1 & 0\cdot2+0\cdot(-1)+1\cdot0 \\ 1\cdot(-1)+1\cdot1+1\cdot0 & 1\cdot(-2)+1\cdot1+1\cdot1 & 1\cdot2+1\cdot(-1)+1\cdot0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Comprueba que $(A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad (A\cdot B)^t = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B^t\cdot A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Luego $(A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t$

6. Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, calcula A^t, $(A+B)^t$, $(A\cdot B)^t$, $A^t\cdot B^t$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (A+B)^t = A^t + B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \qquad A^t\cdot B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

7. Resuelve el sistema de ecuaciones matriciales: $\begin{cases} 3\cdot A - 5\cdot B = C \\ -A + 3\cdot B = D \end{cases}$ donde C = $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ y D = $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Sumando a la 1ª ecuación la segunda multiplicada por 3: $4B = C + 3D$

Luego: $B = \frac{1}{4}(C + 3D) = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{5}{2} \\ \frac{17}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, y despejando en la 2ª ecuación $A = 3B - D = \begin{bmatrix} \frac{13}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{39}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

8. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

a) Demuestra que se verifica: $A^3 + I = 0$, siendo I la matriz identidad y 0 la matriz nula.
b) Calcula A^{-1} c) Halla razonadamente A^{10}

a) $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$; $A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -I \rightarrow A^3 + I = 0$

b) $A^3 + I = 0 \rightarrow -A^3 = I \rightarrow A\cdot(-A^2) = I \rightarrow A^{-1} = -A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

c) $A^{10} = A^3\cdot A^3\cdot A^3\cdot A = (-I)\cdot(-I)\cdot(-I)\cdot A = (-I)^3\cdot A = -I\cdot A = -A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

9. ¿Es cierto en el cálculo matricial que "suma por diferencia es igual a la diferencia de cuadrados"?

$(A + B)\cdot(A - B) = A\cdot A - A\cdot B + B\cdot A - B\cdot B = A^2 - A\cdot B + B\cdot A - B^2$.

Como, en general, $A\cdot B \neq B\cdot A$, la regla no es aplicable al caso de matrices.

10. Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación $A\cdot X + B = C$.

$A\cdot X + B = C \rightarrow A\cdot X = C - B$

Si $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ a+2c & b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Igualamos término a término: $\begin{cases} a+c=1 \\ a+2c=0 \\ b+d=1 \\ b+2d=1 \end{cases} \left\| \begin{matrix} a=-2 \\ b=1 \\ c=1 \\ d=0 \end{matrix} \right. \rightarrow X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

11. Para cualquier valor natural n, calcula A^n, donde A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Realizando el producto, se tiene que $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; tomamos como hipótesis de inducción completa que $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, y multiplicando $A^n \cdot A$ se confirma el resultado.

12. Calcular el rango de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Realizamos las transformaciones elementales siguientes:

$$r\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = (F_2 - 3F_1) = r\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = (F_3 - 2F_1) = r\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= (F_4 \leftrightarrow F_2) = r\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (F_3 - 7F_2) = r\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -25 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

ya que tiene 3 filas linealmente independientes (el número de filas que no están formadas íntegramente por ceros).

13. Calcula, por el método de Gauss-Jordan, la inversa de A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim (f_2 + f_1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim (\tfrac{1}{4}f_2) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim (f_3 - 4f_2) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim (-f_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim (f_2 - f_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{4} & \frac{-3}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim (f_1 - f_2) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{4} & \frac{-3}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Por tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ \frac{-3}{4} & \frac{-3}{4} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

DETERMINANTES

14. Calcula los determinantes de las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ -1 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Aplicando la regla de Sarrus:

$|A| = 0\cdot7\cdot(-5) + 3\cdot1\cdot2 + (-1)\cdot4\cdot8 - 2\cdot7\cdot8 - (-1)\cdot3\cdot(-5) - 4\cdot1\cdot0 = -153;$

$|B| = 4\cdot4\cdot(-5) + \sqrt{2}\cdot1\cdot\sqrt{3} + 1\cdot0\cdot0 - 0\cdot4\cdot\sqrt{3} - \sqrt{2}\cdot1\cdot(-5) - 1\cdot4\cdot0 = \sqrt{6} + 5\sqrt{2} - 80$

15. Si el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es –11, ¿cuánto valen los determinantes de las matrices $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

$B = A^t \rightarrow |B| = |A| = -11.$

C se obtiene de aplicar a A, sucesivamente, dos cambios de fila ($f_1 \leftrightarrow f_3$ y $f_2 \leftrightarrow f_3$); luego $|C| = -11$.

16. Demuestra que el determinante $\begin{vmatrix} \text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 \\ \text{sen}\alpha - \cos\alpha & \text{sen}\alpha + \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$ no depende de α.

Regla de Sarrus: $\text{sen}\alpha\cdot\text{sen}\alpha\cdot1 + 0\cdot(-\cos\alpha)\cdot\cos\alpha + (\text{sen}\alpha - \cos\alpha)\cdot\cos\alpha\cdot0 - (\text{sen}\alpha - \cos\alpha)\cdot\text{sen}\alpha\cdot0 - 1\cdot(-\cos\alpha)\cdot\cos\alpha - \text{sen}\alpha\cdot(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)\cdot0 = \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Más brevemente puede verse desarrollando por los elementos de la última columna:

$$\begin{vmatrix} \text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 \\ \text{sen}\alpha - \cos\alpha & \text{sen}\alpha + \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} sen\alpha & cos\alpha \\ -cos\alpha & sen\alpha \end{vmatrix} = sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

17. Comprueba que $\begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1+b \end{vmatrix} = (1 + a)(1 + b) - 1 = ab + a + b$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b$, $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a$. Por tanto se cumple la igualdad.

18. Comprueba que |A·B|=|A|·|B| para las matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 13 \end{pmatrix}$.

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 8 & -8 \\ 12 & 5 & 45 \\ 3 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$|A\cdot B| = 24$; $|A| = 8$; $|B| = 3$; $|A|\cdot|B| = 8\cdot3 = 24 = |A\cdot B|$

20. Dado que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$, calcula:

a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$

Representamos por Δ el valor del determinante en cada caso.

a) Dos cambios de fila: $\Delta = -6$; b) $\Delta = (-1)\cdot 3\cdot 4\cdot(-6) = 72$;
c) Se resta f_3 a f_1 y resulta $\Delta = -6$; d) $\Delta = -3\cdot(-6) = 18$

21. Calcula los determinantes de las siguientes matrices desarrollando por los adjuntos:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A| = (1^{\text{a}}\text{ columna}) = 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 83 + 18 = 101$$

$$|B| = (3^{\text{a}}\text{ columna}) = a^2\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} - b^2\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & c \end{vmatrix} + c^2\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} = a^2(c-b) - b^2(c-a) + c^2(b-a)$$

Este tipo de determinante se denomina Vandermonde. Es interesante observar que:

$$|B| = \begin{pmatrix} c_2 - a\cdot c_1 \\ c_3 - a^2\cdot c_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b^2-a^2 \\ 1 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c^2-a^2) - (c-a)(b^2-a^2) =$$

$$= (b-a)(c-a)(c+a) - (c-a)(b-a)(b+a) = [c+a-b-a](c-a)(b-a) = (c-b)(c-a)(b-a)$$

$$|C| = (3^{\text{a}}\text{ columna}) = -3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3\cdot\left[4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\right] = -3\cdot 3\cdot(-16) = 144$$

$$|D| = \begin{pmatrix} -f_3 + f_1 \\ -f_4 + f_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 8 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (f_2 + f_3) = 4\begin{vmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (1^{\text{a}}\text{ columna}) = 4\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -8\cdot(-15) = -216.$$

23. Calcula los siguientes determinantes triangularizándolos previamente:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (f_2 \leftrightarrow f_3) = -\begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (2f_1+f_3) = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 1 \cdot 5 \cdot (-2) = 30$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (2f_1+f_2) = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (f_2 \leftrightarrow f_3) = (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$

$= (-3f_2 + f_3) = -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 1 \cdot 1 \cdot (-11) = 33$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (f_1 \leftrightarrow f_2) = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-2f_1+f_2) = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -2f_2 + f_3 \\ -f_2 + f_4 \end{pmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (f_3 + f_4) = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 6$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2f_1 + f_2) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2f_3 + f_4) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= (-f_3 + f_4) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = -2$

25. Calcula las matrices adjuntas de las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} k+1 & k-1 & 7 \\ 2 & k+3 & 4 \\ 5 & k+1 & k \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{adj}(B) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -4 & 2 & 5 \\ -5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{adj}C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} k+3 & 4 \\ k+1 & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & k+3 \\ 5 & k+1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} k-1 & 7 \\ k+1 & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k-1 & 7 \\ 5 & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} k+1 & k-1 \\ 5 & k+1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} k-1 & 7 \\ k+3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} k-1 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k+1 & k-1 \\ 2 & k+3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^2-k-4 & 20-2k & -3k-14 \\ -k^2+8k+7 & k^2-k-35 & -k^2+3k-6 \\ -3k-25 & -4k+18 & k^2+2k+5 \end{bmatrix}$$

26. Calcula: a) $(A\cdot B)^{-1}$; b) $(A^{-1})^t$, siendo A y B las del ejercicio anterior

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} -3 & 10 & -6 \\ -1 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix};\ |A\cdot B|=1;\ (A\cdot B)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 6 \\ -2 & 6 & -3 \\ -5 & 15 & -8 \end{bmatrix};\ |A| = 1;\ (A^{-1})^t = \mathrm{adj}A$$

28. Calcula el rango de las matrices siguientes:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 12 & 6 & 10 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 11 & 6 & -5 & 24 \\ 0 & 8 & 3 & 4 & 12 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 & 4 & 0 & -1 \\ 13 & 0 & 6 & 0 & 7 & 11 & 0 \\ 17 & -9 & 15 & -15 & 14 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$r(A) = 2$ ya que el mayor orden posible es 2 y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Triangularizamos B:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 11 & 6 & -5 & 24 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & 12 \end{bmatrix} \to \begin{pmatrix} -2f_1+f_3 \\ -f_1+f_3 \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -7 & 20 \\ 0 & 6 & 0 & 3 & 10 \end{bmatrix} \to (c_2 \leftrightarrow c_3) \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & 20 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{pmatrix} -f_2+f_3 \\ -\frac{6}{7}f_2+f_4 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{33}{7} & 10 \end{bmatrix} \to (c_4 \leftrightarrow c_5) \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 20 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & \frac{33}{7} \end{bmatrix} \to \left(-\tfrac{1}{2}f_3+f_4\right) \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{101}{14} \end{bmatrix} \to r(B) = 4$$

Tomando en C el menor $\begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 11 & 0 \\ -9 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -198 \neq 0$, se tiene que $r[C] = 3$

29. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$. Si A tiene rango dos, ¿uno o varios de los determinantes $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix}$ son distintos de cero?

Si A tiene rango 2, algún menor de orden 2 es no nulo. Los posibles menores de orden 2 son $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$. Este último tiene el mismo valor que $\begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix}$ (matriz traspuesta) por lo que, en efecto, alguno ha de ser distinto de cero.

30. ¿Para qué valores de a y b tiene inversa la matriz $A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ 2a & a+b \end{pmatrix}$? Calcula A^{-1}.

$\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$; $|A| = (a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$. Por tanto, si $a = 0 = b$ $\nexists A^{-1}$. En cualquier otro caso, se podrá calcular A^{-1}: $A^{-1} = (1/|A|)\cdot adj(A^t) = \dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a+b & -b \\ -2a & a+b \end{bmatrix}$

31. Demuestra que $|adjA| = |A|^{n-1}$, siendo n la dimensión de la matriz cuadrada A.

Como $|A|=|A^t|$, entonces: $|A|\cdot|adjA|=|A^t|\cdot|adjA| = |A^t\cdot adjA|=$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{vmatrix} = |A|^n .$$

Ya que al proceder a realizar el producto, se van obteniendo los desarrollos de $|A|$ por una de sus líneas (elementos de la diagonal) o por los adjuntos de una línea paralela, que sabemos resulta ser 0. Por tanto $|A|\cdot|adjA| = |A|^n$, y si $|A| \neq 0$, entonces $|adjA|=|A|^{n-1}$.

32. Calcula el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \end{vmatrix}$

Para conocer la forma de cálculo de un determinante de Vandermonde, resolveremos un caso más general:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 - a\cdot f_1 \\ f_3 - a^2\cdot f_1 \\ f_4 - a^3\cdot f_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ 0 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2-ab+a^2 & c^2-ac+a^2 & d^2-ad+a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b(b-a)+a^2 & c(c-a)+a^2 & d(d-a)+a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f_2-(b+a)\cdot f_1 \\ f_3-(b^2-ab+a^2)\cdot f_1 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c^2-ac+ab-b^2 & d^2-ad+ab-b^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ (c-b)(c+b-a) & (d-b)(d+b-a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c+b-a & d+b-a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

Con lo cual, en el ejemplo numérico, se tendrá:

$\Delta = (3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)(5-4) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 1 = 12$

33. Halla la matriz X que verifica que A·X·A = B, donde A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Multiplicando a izquierda y derecha por A^{-1}:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot M\cdot A^{-1} \rightarrow X = A^{-1}\cdot M\cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

34. Obtén la forma general de una matriz A de orden 2 que sea antisimétrica. Calcula A^2, A^4 y A^{33}.

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=-a \Rightarrow a=0 \\ b=-c \\ d=-d \Rightarrow d=0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} = b\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Así } A^2 = b^2\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = b^2\cdot\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -b^2\cdot I\,;$$

$$\text{Así pues } A^4 = b^4\cdot I \rightarrow A^{32} = (A^4)^8 = b^{32}\cdot I \rightarrow A^{33} = A^{32}\cdot A = b^{32}\cdot I\cdot b\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = b^{33}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

35. Halla el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$, según los valores del parámetro a:

PROCEDIMIENTO I: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix}$ = (Sarrus) = $(a^2-1)^2$; $|A| = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$

Por tanto: 1) Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$, rango(A) = 3

2) Si $a = -1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango(A) = 2, puesto que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$.

3) Si $a = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango(A) = 1

PROCEDIMIENTO II: Triangularizamos por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} f_2-f_1 \\ f_3-f_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 0 & a^2-1 & a-1 \\ 0 & -(a^2-1) & a^2-a \end{pmatrix} \sim (f_3+f_2) \sim \begin{pmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 0 & a^2-1 & a-1 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{pmatrix}$$

Por tanto: 1) Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$, rango(A) = 3

2) Si $a = -1$, $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango(A) = 2 (2 filas l. i.)

3) Si $a = 1$, $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango(A) = 1

36. Halla el rango de la matriz $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 2 & b & b^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, según los valores de los parámetros a y b:

$$r(M) = (f_1 - f_3) = r\begin{bmatrix} a-2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & b & b^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

I) Si $\underline{a = 2}$, r(M) = 2 ya que el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$.

II) Si $\underline{a \neq 2}$, el menor $\begin{vmatrix} a-2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ y entonces r(M) dependerá del valor de b.

Orlamos con la segunda fila y tercera y cuarta columnas:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a-2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & b & b^2 \end{vmatrix} = (a-2)\cdot b\cdot(b^2-1) \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a-2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix} = (a-2)(1-ab).$$

Así, si $b \neq 0$ y $b \neq \pm 1$ o $a\cdot b \neq 1 \rightarrow$ r(M) = 3.

Pero si $b = 0$ ($\Delta_2 \neq 0$) $\rightarrow$ r(M) = 3

Y si $b = \pm 1$, r(M)=3 cuando $a \neq \pm 1$, y r(M) = 2 cuando $a = \pm 1$.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

37. Resuelve por el método de Gauss los sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=1 \\ -x-2y+2z=1 \\ 3x+y-2z=-1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 2x-3y=-2 \\ 2x+y=1 \\ 3x+2y=1 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y-z=-15 \\ 5x+3y+2z=0 \\ 3x+y+3z=11 \\ 6x-4y+2z=30 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=1 \\ -x-2y+2z=1 \\ 3x+y-2z=-1 \end{array}\right\} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim (f_1 \leftrightarrow f_2) \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} f_2+2f_1 \\ f_3+3f_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \left(-\frac{1}{3}f_2\right) \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim (f_3+5f_2) \sim$

$\sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \to \boxed{z=3} \to y-3=-1 \Rightarrow \boxed{y=2} \to -x-4+6=1 \Rightarrow \boxed{x=1}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-3y=-2 \\ 2x+y=1 \\ 3x+2y=1 \end{array}\right\} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} f_2-f_1 \\ 2f_3-3f_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim (f_2 \leftrightarrow f_3) \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$\sim (f_3-4f_2) \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \to$ ¡¡$0=7$!! $\to$ *SISTEMA INCOMPATIBLE*

c) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y-z=-15 \\ 5x+3y+2z=0 \\ 3x+y+3z=11 \\ 6x-4y+2z=30 \end{array}\right\} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ -6 & -4 & 2 & 30 \end{bmatrix} \sim (f_4=-2f_1) \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} -f_1+f_3 \\ -\frac{5}{3}f_1+f_2 \end{pmatrix} \sim$

$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} & 25 \\ 0 & -1 & 4 & 26 \end{bmatrix} \sim (3 \cdot f_2) \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & 11 & 75 \\ 0 & -1 & 4 & 26 \end{bmatrix} \sim (-f_2+f_3) \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & 11 & 75 \\ 0 & 0 & -7 & -49 \end{bmatrix} \to$

$\left\{\begin{array}{l} z=\frac{-49}{-7}=7 \\ y=11z-75=77-75=2 \\ x=\frac{1}{3}(-15+z-2y)=\frac{1}{3}(-15+7-4)=-4 \end{array}\right. \to \begin{array}{l} \boxed{x=-4} \\ \boxed{y=2} \\ \boxed{z=7} \end{array}$

38. Resuelve por Cramer el sistema: (I) x + y = 0, (II) y + z = 8, (III) 7y – z = 0.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -8;\ |A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 8;\ |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -8;\ |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -56;$

$x=\frac{|A_X|}{|A|}=-1;\quad y=\frac{|A_Y|}{|A|}=1;\quad z=\frac{|A_Z|}{|A|}=7$

40. Sabiendo que a > b > c son tres números naturales consecutivos, resuelve por Cramer el sistema (I) x + y + z = a, (II) x – z = –c, (III) y + z = b.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\,;\ |A_x| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -c & 0 & -1 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-c)-(b-c) = 2-1 = 1;$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & -c & -1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 2(b-c)-(a-c) = 2-2 = 0;\ |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -c \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = a-b+c = 1+c = b.$$

Por tanto, $x = 1;\ y = 0;\ z = b$

41. Discute los siguientes sistemas:

$$(I)\ \begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x-2y-z=4 \\ -2x+y+2z=2 \end{cases} \quad (II)\ \begin{cases} 3x-4y+2z=1 \\ -2x-3y+z=2 \\ 5x-y+z=5 \end{cases} \quad (III)\ \begin{cases} x-2y=-3 \\ -2x+3y+z=4 \\ 2x+y-5z=4 \end{cases}$$

$$(IV)\ \begin{cases} 2x-3y=-2 \\ 2x+y=9 \\ 3x+2y=1 \end{cases} \quad (V)\ \begin{cases} 3x+2y-z=-15 \\ 5x+3y+2z=0 \\ 3x+y+3z=11 \\ -6x-4y+2z=30 \end{cases} \quad (VI)\ \begin{cases} 10y-4z+t=1 \\ x+4y-z+t=2 \\ 3x+2y+z+2t=5 \\ -2x-8y+2z-2t=-4 \\ x-6y+3z=1 \end{cases}$$

I) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; $\det A = -14 \rightarrow r(A) = 3 = r(B) \rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

II) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; $\det A = 0$; $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -17 \rightarrow r(A) = 2$. Orlamos: $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -102$

Por tanto $r(B) = 3 \neq 2 = r(A) \rightarrow$ SISTEMA INCOMPATIBLE

III) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$; $\det A = 0$; $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \rightarrow r(A) = 2$. Orlamos: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

Por tanto $r(B) = 2 = r(A) \rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (1 g. l.)

IV) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$; $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; $|B| = -107 \neq 0$. $r(A) = 2 \neq 3 = r(B) \rightarrow$ *SISTEMA INCOMPATIBLE*

V) $A|B = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ -6 & -4 & 2 & 30 \end{array}\right]$; $|B| = 0$ ya que $f_4 = -2f_1$; $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$.

Luego $r(A) = r(B) = 3 =$ nº de incógnitas $\rightarrow$ S. C. D.

VI) Buscamos el rango por semejanza: $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 10 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ -2 & -8 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & -6 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim (f_1 \leftrightarrow f_2) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 10 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ -2 & -8 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & -6 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\sim \begin{pmatrix} -3f_1 + f_3 \\ 2f_1 + f_4 \\ -f_1 + f_5 \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 10 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 4 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 10 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow r(A) = r(B) = 2 <$ nº de incógnitas $\rightarrow$

Sistema Compatible Indeterminado.

42. Discute y resuelve, si es posible, los siguientes sistemas:

(I) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 2 \\ 5x - y + z = 5 \end{cases}$ (III) $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 4 \end{cases}$

(I) Triangularizamos, utilizando el método de Gauss, la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} f_2 - 3f_1 \\ f_3 + 2f_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim (5f_3 + 3f_2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \end{pmatrix}$$

Es evidente que $r(A) = 3 = r(B) \rightarrow$ SCD. Resolvemos por Gauss: $z = 24/8 = 3$;

$-5y - 12 = -2 \rightarrow y = -2$; $x - 2 + 3 = 2 \rightarrow x = 1$. Por tanto: $(x, y, z) = (1, -2, 3)$

(II) Triangularizamos, utilizando el método de Gauss, la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3f_2 + 2f_1 \\ 3f_3 - 5f_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & -17 & 7 & 8 \\ 0 & 17 & -7 & 10 \end{pmatrix} \sim (f_3 + f_2) \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & -17 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

Es evidente que $r(A) = 2 \neq 3 = r(B) \rightarrow$ SI. No hay solución.

(III) Triangularizamos, utilizando el método de Gauss, la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} f_2 + 2f_1 \\ f_3 - 2f_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \end{pmatrix} \sim (f_3 + 5f_2) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es evidente que $r(A) = 2 = r(B) \rightarrow$ SCI. Resolvemos por Gauss: $y = z + 2$;

$x = -3 + 2y = -3 + 2(z + 2) = 1 + 2z$. Así, si $z = \lambda$: $(x, y, z) = (1 + 2\lambda, \lambda + 2, \lambda)$

44. Discute los siguientes sistemas dependientes de un parámetro:

a) $\begin{cases} 4x+2y=k \\ x+y-z=2 \\ kx+y+z=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} kx+y-z=8 \\ x+y+z=0 \\ 2x+z=k \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+kz=1 \\ x+2y=k \end{cases}$

a) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim (f_2 \leftrightarrow f_1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & k \\ k & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} f_2 - 4f_1 \\ f_3 - kf_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & k-8 \\ 0 & 1-k & 1+k & 1-2k \end{pmatrix} \sim$

$\sim (\frac{1}{2} f_2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & k/2-4 \\ 0 & 1-k & 1+k & 1-2k \end{pmatrix} \sim (f_3 + f_2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & k/2-4 \\ 0 & -k & 3+k & -3-3k/2 \end{pmatrix} \sim$

$\sim (f_3 - kf_2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & k/2-4 \\ 0 & 0 & 3-k & -3+5k/2-k^2/2 \end{pmatrix}$ Por tanto:

I) Si $k \neq 3$, $r(A) = r(B) = 3 \rightarrow$ S.C.D.

II) Si $k = 3$: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow r(A) = 2 = r(B) \rightarrow$ S.C.I. (1 g. l.)

b) $\begin{pmatrix} k & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{pmatrix} \sim (f_2 \leftrightarrow f_1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ k & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} f_2 - kf_1 \\ f_3 - 2f_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1-k & -1-k & 8 \\ 0 & -2 & -1 & k \end{pmatrix} \sim$

$(2f_2 + f_3) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2k & -3-2k & 16+k \\ 0 & -2 & -1 & k \end{pmatrix} \sim (kf_3 - f_2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2k & -3-2k & 16+k \\ 0 & 0 & k+3 & k^2-k-16 \end{pmatrix}$

I) Si $k \neq 0$ y $k \neq -3$, $r(A) = 3 = r(B) \rightarrow$ S.C.D.

II) Si $k = 0$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 16 \\ 0 & 0 & 3 & -16 \end{pmatrix} (f_3 + f_2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $r(A) = 2 = r(B) \rightarrow$ S.C.I.

III) Si $k = -3$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$; $r(A) = 2 \neq 3 = r(B) \rightarrow$ S.I.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & 0 & k \end{pmatrix} \sim (f_3 - f_1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & k-1 \end{pmatrix} \sim (f_3 - f_2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k-1 & k-2 \end{pmatrix}$

I) Si $k \neq -1$, $r(A) = 3 = r(B) \rightarrow$ S.C.D.

II) Si $k = -1$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; $r(A) = 2 \neq 3 = r(B) \rightarrow$ S.I.

46. Discute los siguientes sistemas homogéneos:

$$\text{(I)}\begin{cases}2x-3y+z=0\\x-my-3z=0\\5x-2y-z=0\end{cases}\qquad \text{(II)}\begin{cases}3x+y+z+t=0\\5x-y+mz-t=0\end{cases}\qquad \text{(III)}\begin{cases}-2x+y+3z=0\\3x+y-4z+2t=0\\-x+3y+2z+2t=0\\-4x-3y+5z-4t=0\end{cases}$$

$$\text{(I)}\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&-m&-3\\5&-2&-1\end{vmatrix}=7m+28$$

a) Si $m\neq-4$, $r(A)=3$ → Solución trivial.

b) Si $m=-4$, $\begin{vmatrix}2&1\\5&-1\end{vmatrix}\neq0$ → $r(A)=2$ →

$$\text{(II) } r\begin{bmatrix}3&1&1&1\\5&-1&m&-1\end{bmatrix}=2<\text{nº incógnitas} \to \text{S.C.I. para cualquier valor de m.}$$

$$\text{(III)}\quad\begin{bmatrix}-2&1&3&0\\3&1&-4&2\\-1&3&2&2\\-4&-3&5&-4\end{bmatrix}\sim(f_1\leftrightarrow f_3)\sim\begin{bmatrix}-1&3&2&2\\3&1&-4&2\\-2&1&3&0\\-4&-3&5&-4\end{bmatrix}\sim\begin{pmatrix}3f_1+f_2\\-2f_1+f_3\end{pmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix}-1&3&2&2\\0&10&2&8\\0&-5&-1&-4\\0&-15&-3&-12\end{bmatrix}\sim\begin{pmatrix}f_2=2f_3\\f_4=3f_3\end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1&3&2&2\\0&-5&-1&-4\end{bmatrix}\to r(A)=2\to \text{S. C. I.}$$

47. Elimina los parámetros de los siguientes sistemas: a) $\left.\begin{array}{l}x=-2\alpha+\beta\\y=-\alpha+2\beta\\z=\alpha-\beta\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l}x=\alpha+\beta+\lambda\\y=\alpha-\beta-3\lambda\\z=2\alpha-2\lambda\\t=4\alpha-4\lambda\end{array}\right\}$

Considerados los parámetros como incógnitas, el sistema ha de ser compatible y por tanto, rangos de matriz principal y ampliada iguales:

$$\text{a) } r\begin{bmatrix}-2&1\\-1&2\\1&-1\end{bmatrix}=2\to\begin{vmatrix}-2&1&x\\-1&2&y\\1&-1&z\end{vmatrix}=0\to x+y+3z=0$$

$$\text{b) } r\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&-3\\2&0&-2\\4&0&-4\end{bmatrix}=2\left(\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}\neq0\right)\text{ Orlamos este menor: }\begin{cases}\begin{vmatrix}1&1&x\\1&-1&y\\2&0&z\end{vmatrix}=0\Rightarrow x+y-z=0\\[2ex]\begin{vmatrix}1&1&x\\2&0&z\\4&0&t\end{vmatrix}=0\Rightarrow t=2z\end{cases}$$

VECTORES

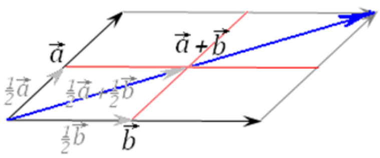
48. Prueba que la condición necesaria y suficiente para que dos vectores libres en el plano, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tengan la misma dirección es que $\vec{u} = \lambda\cdot\vec{v}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

($\Rightarrow$) Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ con la misma dirección. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen el mismo sentido, tomamos $\lambda = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}$. Evidentemente $\lambda\vec{v}$ será un vector equipolente con $\vec{u}$ ya que $|\lambda\vec{v}| = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}|\vec{v}| = |\vec{u}|$. Luego $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. En el caso de ser de sentidos opuestos bastará tomar $\lambda = -\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}$.

($\Leftarrow$) Por definición de producto externo $\lambda\vec{v}$ es un vector con la misma dirección que $\vec{v}$. Por tanto $\vec{u} = \lambda\cdot\vec{v}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

49. Comprueba que si $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{b} = \vec{u} - \vec{v}$, entonces: $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ y $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

Aplicando el teorema de Tales al paralelogramo construido para la suma $\vec{a} + \vec{b}$, se obtiene que $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. Entonces:



$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = \vec{u} + \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \vec{a} - \vec{v}\\ \vec{b} = \vec{u} - \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \vec{b} + \vec{v}\end{array}\right\} \Rightarrow 2\vec{u} = \vec{u} + \vec{u} = \vec{a} - \vec{v} + \vec{b} + \vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$$

Por tanto: $\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. Análogamente se prueba que $\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

50. Considera el conjunto de los polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que tres en una indeterminada. Demuestra que dicho conjunto, con la operación suma de polinomios y el producto externo de números reales por polinomios, es un espacio vectorial real.

Un polinomio de grado menor o igual que 3 puede escribirse: $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Si consideramos que los polinomios los escribimos con sus monomios en orden decreciente de sus grados, dicho polinomio puede identificarse con (a, b, c, d), es decir, queda asociado de manera unívoca a un vector de $\mathbb{R}^4$. De la misma manera, la suma de polinomios se corresponde con la suma de vectores en $\mathbb{R}^4$, y el producto por un nº real con el producto de un escalar por un vector. Así pues, es obvio que el conjunto de los polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que tres en una indeterminada tienen estructura de espacio vectorial.

51. Sea V = { (x, y, y, –x)/ x, y$\in \mathbb{R}$}, en el que se definen las operaciones:
(x, y, y, –x) + (z, t, t, –z) = (x + z, y + t, y + t, –(x + z)) $\lambda\cdot$(x, y, y, –x) = ($\lambda\cdot$x, $\lambda\cdot$y, $\lambda\cdot$y, –$\lambda\cdot$x)
Demuestra que V, con estas operaciones, es un espacio vectorial real.

SUMA:

Asociativa: (a, b, b, -a) + [(x, y, y, -x) + (z, t, t, -z)] = (a, b, b, -a)+(x + z, y + t, y + t, -(x + z))=
= (a + x + z, b + y + t, b + y + t, -(a + x + z)) = (a + x, b + y, b + y, -(a + x)) + (z, t, t, -z) =
= [(a, b, b, -a) + (x, y, y, -x)] + (z, t, t, -z)

Elemento neutro: (x, y, y, -x) + (0, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0) + (x, y, y, -x) = (x, y, y, -x)

Elemento opuesto: (x, y, y, -x) + (-x, -y, -y, x) = (-x, -y, -y, x) + (x, y, y, -x) = (0, 0, 0, 0)

Conmutativa: (x, y, y, -x) + (z, t, t, -z) = (x + z, y + t, y + t, -(x + z)) = (z + x, t + y, t + y, -(z+x)) = (z, t, t, -z) + (x, y, y, -x)

PRODUCTO EXTERIOR:

Distributividad respecto a la suma de escalares: (λ + μ)$\cdot$(x, y, y, -x) =
=((λ + μ)$\cdot$x, (λ + μ)$\cdot$y, (λ + μ)$\cdot$y, -(λ + μ)$\cdot$x) = ($\lambda\cdot$x + $\mu\cdot$x, $\lambda\cdot$y + $\mu\cdot$y, $\lambda\cdot$y + $\mu\cdot$y, - ($\lambda\cdot$x + $\mu\cdot$x))=
= ($\lambda\cdot$x, $\lambda\cdot$y, $\lambda\cdot$y, - $\lambda\cdot$x) + ($\mu\cdot$x, $\mu\cdot$y, $\mu\cdot$y, -$\mu\cdot$x) = $\lambda\cdot$(x, y, y, -x) + $\mu\cdot$(x, y, y, -x)

Distributividad respecto de la suma de vectores. $\lambda\cdot$[(x, y, y, -x) + (z, t, t, -z)]=
=$\lambda\cdot$(x + z,y + t,y + t, -(x + z))= ($\lambda\cdot$(x + z), $\lambda\cdot$(y + t), $\lambda\cdot$(y + t), -$\lambda\cdot$(x + z))=

$= (\lambda\cdot x + \lambda\cdot z, \lambda\cdot y + \lambda\cdot t, \lambda\cdot y + \lambda\cdot t, -(\lambda\cdot x + \lambda\cdot z)) = (\lambda\cdot x, \lambda\cdot y, \lambda\cdot y, -\lambda\cdot x) + (\lambda\cdot z, \lambda\cdot t, \lambda\cdot t, -\lambda\cdot z) =$
$= \lambda\cdot(x, y, y, -x) + \lambda\cdot(z, t, t, -z)$

Asociatividad respecto al producto de escalares:

$\lambda\cdot(\mu\cdot(x, y, y, -x)) = \lambda\cdot(\mu\cdot x, \mu\cdot y, \mu\cdot y, -\mu\cdot x) = (\lambda\cdot\mu\cdot x, \lambda\cdot\mu\cdot y, \lambda\cdot\mu\cdot y, -\lambda\cdot\mu\cdot x) = (\lambda\cdot\mu)(x, y, y, -x)$

Elemento unidad: Bastará tomar $\lambda = 1$

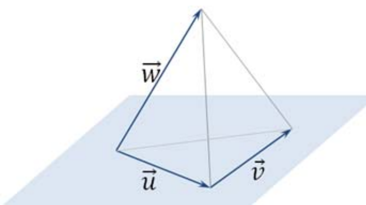
52. Dado el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\}$ averigua si es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

No es subespacio vectorial porque si $\lambda < 0$, $\lambda x < 0$ aunque sea $x \geq 0$

53. Considera el espacio vectorial de los polinomios en una indeterminada de grado menor o igual que dos $\mathbb{R}_2[x]$. Demuestra que el sistema $\{1, x, x^2\}$ forma un sistema generador de $\mathbb{R}_2[x]$.

Todo elemento de $\mathbb{R}_2[x]$ es de la forma $ax^2 + bx + c$, es decir $a\cdot x^2 + b\cdot x + c\cdot 1$, es decir, combinación lineal de elementos de $\{1, x, x^2\}$, por tanto, es evidente que es un sistema generador.

54. Sean los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in V^3$ de la figura. Considera el conjunto $S = \{\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}, \vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}\}$. ¿Es S un sistema libre? ¿Y el sistema $S' = \{\vec{u}-\vec{v}, \vec{v}-\vec{u}, \vec{w}-\vec{u}\}$?



Según se observa en la figura, $\vec{u}-\vec{v}$ y $\vec{u}+\vec{v}$ están en el mismo plano que $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y son linealmente independientes entre sí. Pero el vector $\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}$ no está en el mismo plano, por tanto S es un sistema libre. Lo mismo ocurre con S' ya que para que un sistema de tres vectores sea ligado en V^3 deben ser coplanarios.

55. Demuestra que si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es un sistema ligado en un espacio vectorial V, también lo es el sistema $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}\}$

Si el conjunto de vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es ligado, es porque existen tres escalares a, b, c, no todos nulos tales que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$. Por tanto, también $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} + 0\vec{t} = \vec{0}$. Es decir, el conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}\}$ también es ligado.

56. Dado el cuadrado ABCD, ¿son linealmente independientes los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CB}$? ¿Y los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$?

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CB}$ son perpendiculares por tanto son l. i. en V^2. Pero $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, por tanto no pueden ser l. i.

57. Demuestra que los vectores de la forma (x, y, x) forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Encuentra la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ de este subespacio en la que $(5, 3, 5) = 2\vec{u} + 3\vec{v}$ y $(3, 2, 3) = \vec{u} + \vec{v}$.

Sea $A = \{(x, y, x) / x, y \in \mathbb{R}\}$. Se trata de probar que la suma de vectores de A y el producto por un escalar, vuelve a ser un elemento de A:

$(x, y, x) + (x', y', x') = (x + x', y + y', x + x') \in A$. Análogamente $\lambda\cdot(x, y, x) = (\lambda\cdot x, \lambda\cdot y, \lambda\cdot x) \in A$

Por otra parte, una base de A sería de la forma $B = \{(p, q, p), (m, n, m)\}$. Entonces:

$$(5, 3, 5) = 2(p, q, p) + 3(m, n, m) = (2p + 3m, 2q + 3n, 2p + 3m) \rightarrow \begin{cases} 2p + 3m = 5 \\ p + m = 3 \end{cases}$$

$$(3, 2, 3) = (p, q, p) + (m, n, m) = (p + m, q + n, p + m) \rightarrow \begin{cases} 2q + 3n = 3 \\ q + n = 2 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de 4 ecuaciones, resulta que $\vec{u} = (1, 0, 1)$ y $\vec{v} = (1, 1, 1)$

59. Sea E = {(a, 0, b)/ a, b $\in \mathbb{R}$} un subespacio de $\mathbb{R}^2$. ¿Pertenece (0, 0, –2) a E? Si es así, da sus coordenadas respecto de la base B = {(–2, 0, 0), (1, 0, –1)} de E.

Por tener la segunda componente nula, el vector (0, 0, –2) pertenece a E.

$(0, 0, -2) = \lambda_1(-2, 0, 0) + \lambda_2(1, 0, -1) = (-2\lambda_1 + \lambda_2, 0, -\lambda_2)$.

Igualando las componentes: $0 = -2\lambda_1 + \lambda_2$; y $-2 = -\lambda_2 \rightarrow \lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$.

Por tanto (1, 2) son las componentes de (0, 0, –2) en la base B.

60. Considérese el subespacio generado por los vectores $\vec{u} = (1, 2, -1, 2)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2, 1)$. ¿Qué valores deben tomar a y b para que $\vec{w} = (1, 4, a, b)$ sea un vector de dicho subespacio?

Sea $W = L(\vec{u}, \vec{v})$. Para que $\vec{w} \in W$, deberán existir λ y μ tales que $\vec{w} = \lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{v}$. Es decir:

$(1, 4, a, b) = (\lambda, 2\lambda+\mu, -\lambda+2\mu, 2\lambda+\mu) \rightarrow 1 = \lambda, 4 = 2\lambda+\mu, a = -\lambda+2\mu, b = 2\lambda+\mu \rightarrow a = 3$ y $b = 4$.

61. ¿ Cuáles son las coordenadas de $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ en la base B' = {(0,1), (2, –1)} sabiendo que en la base B = {(1, 0), (0, 1)} es $\vec{v} = (2, -1)$

Veamos cómo se expresan los vectores de la base B respecto de la base B':

$(1, 0) = a_1(0, 1) + a_2(2, -1) = (2a_2, a_1 - a_2)$ $\quad$ $(0, 1) = b_1(0, 1) + b_2(2, -1) = (2b_2, b_1 - b_2)$

Igualando componentes y resolviendo el sistema resultante: $a_1 = ½$, $a_2 = ½$, $b_1 = 1$ y $b_2 = 0$.

Por tanto: $\vec{v} = 2(1, 0) - 1(0, 1) = 2[½(0, 1) + ½(2, -1)] - 1[1(0, 1) + 0(2, -1)] = 0(0, 1) + 1(2, -1)$.

Es decir, las componentes de $\vec{v}$ en la base B' son (0, 1)

62. Si se define el rango de un sistema de vectores como el número de vectores linealmente independientes que posee, averigua el rango del sistema formado por los vectores de $\mathbb{R}^3$:

$\vec{u}$ (1, 0, 0), $\quad$ $\vec{v}$ (0, 1, 1), $\quad$ $\vec{w}$ (1, 1, 1) $\quad$ y $\quad$ $\vec{t}$ (1, –1, –1).

Se observa que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ y que $\vec{t} = \vec{u} - \vec{v}$. Sólo queda ver si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes. Para ello:

$\vec{0} = (0, 0, 0) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 1) = (a, b, b)$.

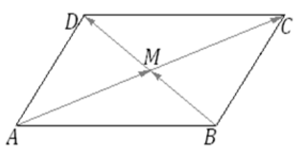
Igualando componentes, se obtiene que debe ser a = 0 y b = 0, así pues son linealmente independientes. Por tanto, el rango es 2.

63. Calcula a y b, para que los puntos A(2, −1, 0), B(3, 0, 1) y C (a, b + 1, 2) estén alineados.

Consideramos los vectores:
$\overrightarrow{AB} = (3 - 2, 0 - (-1), 1 - 0) = (1, 1, 1)$ $\quad$ y $\quad$ $\overrightarrow{AC} = (a - 2, b + 1 - (-1), 2 - 0) = (a - 2, b + 2, 2)$

Para que A, B y C estén alineados, estos dos vectores deben tener la misma dirección y por tanto, sus componentes deben ser proporcionales: $\frac{a-2}{1} = \frac{b+2}{1} = \frac{2}{1}$, de donde, se obtiene que a = 4 y b = 0.

64. Sea M = (2, −1, 3) el punto medio del paralelogramo ABCD, calcula C y D si A = (1, −1, 1) y B = (3, −2, 5).



Observamos en la imagen que $\overrightarrow{AM} = (1, 0, 2) = \overrightarrow{MC} = (x_C - 2, y_C + 1, z_C - 3)$.

Por tanto: $x_C - 2 = 1 \rightarrow x_C = 3$; $y_C + 1 = 0 \rightarrow y_C = -1$; $z_C - 3 = 2 \rightarrow z_C = 5$.

Es decir: C = (3, 0, 5).

Análogamente, $\overrightarrow{AB} = (2, -1, 4) = \overrightarrow{DC} = (x_D - 3, y_D - 0, z_D - 5) \rightarrow D = (5, -1, 9)$

66. Encontrar los vectores unitarios de $\mathbb{R}^3$ que son perpendiculares a $\vec{v}$ = (1, 0, 1) y forman un ángulo de 60° con $\vec{w} = \left(\frac{1}{2}, \ \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \frac{1}{2}\right)$.

Consideramos el vector $\vec{u}$ (a, b, c).

Puesto que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ han de ser perpendiculares, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \rightarrow$ a + c = 0 $\rightarrow$ c = –a $\rightarrow$ $\vec{u}$ (a, b, –a).

Por otra parte, $\vec{u}\cdot\vec{w} = |\overrightarrow{u}|\cdot|\vec{w}|cos60° = \frac{a}{2} + \frac{b\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2}$. Como $\vec{u}$ es unitario, $|\vec{u}| = 1$; y $|\vec{w}| = 1$, tenemos que $cos60° = \frac{b\sqrt{2}}{2} \leftrightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Luego $\vec{u}$ (a, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, –a).

Recordemos que $|\vec{u}| = 1 \rightarrow 2a^2 + ½ = 1 \rightarrow$ a = ±½. Por lo tanto, $\vec{u} = \left(\pm\frac{1}{2}, \ \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \mp\frac{1}{2}\right)$.

67. Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in V^3$ verifican: $|\vec{u}| = 3$; $\vec{u}\cdot\vec{v} = 10$ y $\vec{w} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$. Halla $\vec{u}\cdot\vec{w}$.

$\vec{u}\cdot\vec{w} =, \vec{u}\cdot(3\vec{u} - 2\vec{v}) = 3\vec{u}\cdot\vec{u} - 2\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\cdot|\vec{u}|^2 + 10 = 3\cdot 9 + 10 = 37$

68. Calcula el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabiendo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y $|\vec{u} + \vec{v}| = 7$.

$(\vec{u} + \vec{v})\cdot(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = 9 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + 25 = 2\vec{u}\cdot\vec{v} + 34$

Pero $(\vec{u} + \vec{v})\cdot(\vec{u} + \vec{v}) = |\vec{u} + \vec{v}|^2 = 49$. Por tanto $2\vec{u}\cdot\vec{v} + 34 = 49 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 7{,}5$

Así: $\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{7{,}5}{3\cdot 5} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{\vec{u},\vec{v}} = 60°$

69. Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ cumplen las condiciones: $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 4$, $|\vec{w}| = 7$, $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$. Calcula $\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$.

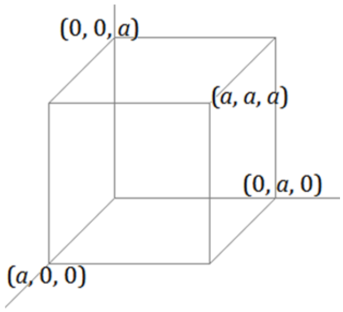
$0 = \vec{0}\cdot\vec{0} = (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})\cdot(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{w}\cdot\vec{w} + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + 2\vec{u}\cdot\vec{w} + 2\vec{v}\cdot\vec{w} =$

$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2(\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}) = 25 + 16 + 49 + 2(\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w})$

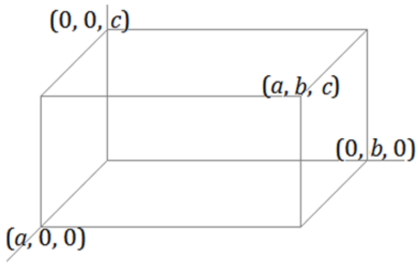
Por tanto $\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w} = \frac{-90}{2} = -45$.

EL ESPACIO AFÍN

70. Dibuja un sistema de referencia con el origen en un vértice de un cubo y los vectores de la base, las tres aristas concurrentes en ese punto. Determina las cooredenadas del vértice del cubo que no está sobre los planos de coordenadas.



71. Haz lo mismo que en la actividad anterior, pero ahora con un ortoedro.



72. Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P(1, 2, 3) y tiene la dirección del vector **v**(4, 5, 6).

$$PARAMÉTRICAS: \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2 + 5\lambda \\ z = 3 + 6\lambda \end{cases} \rightarrow CONTINUA: \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{6}$$

Multiplicando extremos y medios en cada una de las dos igualdades de la forma continua y trasponiendo términos y reduciendo:

$$GENERAL: \begin{cases} 5x - 4y + 3 = 0 \\ 6x - 4z + 6 = 0 \end{cases} \sim (Simplificando\ 2^{a}\ ecuación) \sim \begin{cases} 5x - 4y + 3 = 0 \\ 3x - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

73. Halla las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos A(1, 2, 3) y B(6, 5, 4).

Puede reducirse al ejercicio anterior haciendo A el papel de P y el vector $\overrightarrow{AB}(5, 3, 1)$ el de **v**:

$$PARAMÉTRICAS: \begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \rightarrow CONTINUA: \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$$

74. Halla la ecuación del plano que contiene el punto P(1, 0, 2) y los vectores **u**(3, 2, 1) y **v**(2, 1, 3).

a) Forma vectorial: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \rightarrow (x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(3, 2, 1) + \mu(2, 1, 3)$

b) Forma paramétrica (forma vectorial expresada componente a componente):

$$\begin{cases} x = 1 + 3\lambda + 2\mu \\ y = \quad 2\lambda + \mu \\ z = 2 + \lambda + 3\mu \end{cases}$$

c) Forma general (eliminación de los parámetros λ y μ):

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 2 \\ y & 2 & 1 \\ z-2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 5x - 7y - z - 3 = 0$$

76. Halla la ecuación del plano definido por los puntos A(1, 0, 2), B(2, 1, 0) y C(1, 1, 2).

Puede reducirse al problema anterior haciendo jugar a uno de los puntos el papel de P y los vectores $\overrightarrow{AB}$ (1, 1, –2) y $\overrightarrow{AC}$ (0, 1, 0) los de **u** y **v**, de manera que:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ z-2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x + z - 4 = 0$$

O bien, una forma equivalente del determinante, que utiliza directamente las coordenadas de los puntos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 2 & 1 \\ y & 0 & 1 & 1 \\ z & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x + z - 4 = 0$$

77. Calcula, de dos maneras distintas, la ecuación de un plano que, pasando por el origen, contenga al segmento de extremos A(1, 2, 3) y B(0, 0, –1).

Es análogo al ejercicio anterior $\overrightarrow{OA}$ (1, 2, 3) y $\overrightarrow{OB}$ (0, 0, –1):

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 0 \\ z & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x - y = 0$$

O bien, una forma equivalente del determinante, que utiliza directamente las coordenadas de los puntos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 2 & 0 \\ z & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x - y = 0$$

78. Un plano contiene a las rectas $r: x - 1 = y - 2 = z - 3$ y $s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$. Halla su ecuación.

Ambas rectas pasan por el punto P(1, 2, 3). El vector director de r es $\vec{v} = (1, 1, 1)$ y el de s es $\vec{w} = (1, 0, 2)$. Por tanto, la ecuación del plano que contiene a ambas recta viene dado por:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-2 & 1 & 0 \\ z-3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x - y - z + 3 = 0$$

79. Utilizando las propiedades de los determinantes, comprueba que son equivalentes las formas de ecuación de un plano: Ax + By + Cz + D = 0 y $\begin{vmatrix} x-x_0 & p_1 & q_1 \\ y-y_0 & p_2 & q_2 \\ z-z_0 & p_3 & q_3 \end{vmatrix} = 0$

No hay más que desarrollar el determinante por los elementos de la primera columna:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & p_1 & q_1 \\ y-y_0 & p_2 & q_2 \\ z-z_0 & p_3 & q_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix}(x-x_0) - \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix}(y-y_0) + \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}(z-z_0) =$$

$$\begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} x_0 + \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} y_0 - \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} z_0 = 0$$

Obtenemos la equivalencia deseada sin más que llamar:

$$A = \begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} \quad B = -\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \quad D = -\begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} x_0 + \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} y_0 - \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} z_0$$

80. Posición relativa de los planos π_1: 3x + 2y – z + 7 = 0 y π_2: 2x – y + z – 1 = 0.

Sea un vector característico de π_1 dado por los coeficientes de las variables: $\vec{u} = (3, 2, -1)$, y un vector característico de π_2, $\vec{v} = (2, -1, 1)$. Es evidente que las componentes de estos vectores no son proporcionales:

$$\frac{3}{2} \neq \frac{2}{-1} \neq -\frac{1}{1}$$

Por tanto, los planos son secantes. Si queremos matizar si hay perpendicularidad, procedemos a efectuar el producto escalar de ambos vectores:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = 3 \neq 0$$

Es decir, los planos son SECANTES, NO perpendiculares.

Otra manera de enfocar la resolución es aplicar el teorema de Rouché al sistema de ecuaciones formado por las dos ecuaciones de los planos:

$$r\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 = r\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow SCI \rightarrow PLANOS\ SECANTES$$

81. Posición relativa de los planos π_1: 6x + 12y – 9z + 1 = 0 y π_2: 2x + 4y – 3z – 7 = 0.

Comprobamos la proporcionalidad de los coeficientes:

$$3 = \frac{6}{2} = \frac{12}{4} = \frac{-9}{-3} \neq \frac{1}{-7}$$

Por tanto, los planos son PARALELOS (NO coincidentes)

82. Posición relativa de los planos π_1: 6x + 12y – 9z + 15 = 0 y π_2: 2x + 4y – 3z + 5 = 0.

Comprobamos la proporcionalidad de los coeficientes:

$$3 = \frac{6}{2} = \frac{12}{4} = \frac{-9}{-3} = \frac{15}{5}$$

Los planos son PARALELOS, COINCIDENTES:

Ambas ecuaciones corresponden al mismo plano.

83. Posición relativa de los planos π_1: 3x + 2y – z + 7 = 0, π_2: 2x – y + z – 1 = 0 y π_3: x + y + z = 0.

Estudiamos el sistema de ecuaciones formado por las tres ecuaciones de los tres planos. Para obtener la solución, en su caso, aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \cdot F_3 \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim (F_3 + 3F_2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 22 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{matrix}$$

Es decir, los planos SE CORTAN en el punto P(–1, –1, 2).

84. Estudia, en función de los valores del parámetro k, la posición relativa de los planos π_1: 3x – ky + 2z – (k – 1) = 0, π_2: 2x – 5y + 3z – 1 = 0 y π_3: x + 3y – (k – 1)z = 0.

Nuevamente, se trata de discutir el sistema de ecuaciones. Aplicamos el teorema de Rouché:

$$M = \begin{vmatrix} 3 & -k & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 1-k \end{vmatrix} = -2k^2 + 14k - 20 = -2(k-2)(k-5)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \to r(M) = 2, \qquad \forall k$$

a) Si $k \neq 2$ y $k \neq 5$, r(M) = 3 = r(M') → SCD → Los tres planos se cortan en un punto.

b) Si $k = 2$: $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \to r(M') = r(M) = 2 \to SCI \to$ Los tres planos se cortan en una recta.

c) Si $k = 5$: $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 30 \to r(M') = 3 \neq 2 = r(M) \to SI$

Una vez comprobamos, a simple vista, que no hay dos planos paralelos (coeficientes no proporcionales), concluimos que los planos se cortan dos a dos en tres rectas paralelas.

85. Halla la ecuación de "todas las hojas de un libro, en cualquier posición de lectura", sabiendo que las 'tapas, abiertas en una determinada posición" tienen de ecuación: $\begin{cases} \sqrt{3}y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Las hojas del libro, abiertas en cualquier posición, constituyen los planos del haz de planos cuyo eje común es la recta dada: $\sqrt{3}y + z + kz = 0 \to \sqrt{3}y + (1+k)z = 0; \ k \in \mathbb{R}$

86. El núcleo de un transformador de corriente eléctrica está formado por placas de metal separadas por capas de aislante o dieléctrico. Halla la 'ecuación de esas capas', si la de la primera metálica es x + y + z = 1

Se trata del haz de planos paralelos al dado: $x + y + z = 1 + k$, donde k tomará valores concretos dentro de un intervalo según la separación de las placas y la 'anchura' del transformador.

87. Determina la ecuación del haz de planos que tiene por eje o arista la recta que pasa por los puntos A(0, 1, 1) y B(1, 0, –2).

Hallamos las ecuaciones de la recta en forma continua:

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-1}{0-1} = \frac{z-1}{-2-1} \to \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$$

Pasamos a forma de intersección de dos planos con los 'productos cruzados' de dos de las igualdades: $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 3x + z - 1 = 0 \end{cases}$.

Estos dos planos nos dan la base para encontrar el haz de planos:

$$x + y - 1 + k(3x + z - 1) = 0$$

Recuérdese que en esta expresión reducida del haz falta el plano $3x + z - 1 = 0$

89. Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} x = \quad\quad \lambda \\ y = \;\; 1 + \;\; \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$, $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ $t \equiv \begin{cases} \pi_1 : x - y - 1 = 0 \\ \pi_2 : 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$, estudia la posición relativa de cada par de ellas.

Una de las ideas principales de este tema es asociar a cada recta un punto de la misma y un vector director. En los casos de r y s es inmediato. Para t una de las estrategias puede consistir en pasar las ecuaciones a forma paramétrica. Viendo que la variable que se repite en ambas ecuaciones es y, la tomamos como parámetro: $t \equiv \begin{cases} x = 1 + \;\; \mu \\ y = \quad\quad \mu \\ z = 2 + 2\mu \end{cases}$. Así, tenemos la siguiente correspondencia:

$$r \to \begin{cases} A = (0, 1, -1) \\ \vec{u} = (1, 1, 2) \end{cases} \quad s \to \begin{cases} B = (1, 0, 2) \\ \vec{v} = (1, 2, 1) \end{cases} \quad t \to \begin{cases} C = (1, 0, 2) \\ \vec{w} = (1, 1, 2) \end{cases}$$

a) Posición relativa de r y s: $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 3) \to |\vec{u} \quad \vec{v} \quad \overrightarrow{AB}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Las dos rects SE CRUZAN.

b) Posición relativa de r y t: $\overrightarrow{AC} = (1, -1, 3) \to |\vec{u} \quad \vec{w} \quad \overrightarrow{AC}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

Vemos que $\vec{u} = \vec{v}$. Por tanto, como $r(\vec{u} \quad \vec{w} \quad \overrightarrow{AC}) = 2$, las dos rectas son PARALELAS

c) Posición relativa de s y t: Basta observar que B = C, es decir, tienen un punto en común, y sus vectores directores NO son paralelos. Por tanto, las dos rectas son SECANTES.

90. Estudia la posición relativa del plano π: x + y + z + 1 = 0 con la recta de ecuaciones r: x – 1 = 2 – y = z/3.

Pasamos a forma paramétrica las ecuaciones de la recta: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = \quad 3t \end{cases}$

Sustituimos estas expresiones de las variables en la ecuación del plano:

$$(1 + t) + (2 - t) + (3t) + 1 = 0 \to 3t + 4 = 0 \to t = -\frac{4}{3}$$

Por tanto, la recta incide en el plano en el punto que se obtiene de sustituir este valor de t en las ecuaciones paramétricas de r: $\left(-\frac{1}{3}, \quad \frac{10}{3}, \quad -4\right)$

91. Halla el punto de intersección de la recta x = 2t, y = 3t + 1, z = t con el plano 3x+2y–11z–5=0.

Operamos de forma similar al ejercicio anterior:

$$3(2t) + 2(3t + 1) - 11(t) - 5 = 0 \to t - 3 = 0 \to t = 3 \to P = (6, \quad 10, \quad 3)$$

93. Estudia las posiciones relativas del plano π: x + y + z + 1 = 0 y las rectas $r: x = y = \frac{z}{-2}$ y $s: \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z + 1 = 0 \end{cases}$

a) Posición relativa de π y r:

Pasamos a paramétricas las ecuaciones de r: $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$ y sustituimos en la ecuación de π:

$$t + t - 2t + 1 = 0 \rightarrow 1 = 0 \rightarrow ¡INCOHERENTE! \rightarrow RECTA\ PARALELA\ AL\ PLANO$$

b) Posición relativa de π y s:

Pasamos a paramétricas las ecuaciones de s: $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ y sustituimos en la ecuación de π:

$$t + t - 1 - 2t + 1 = 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow ¡OBVIO! \rightarrow RECTA\ CONTENIDA\ EN\ EL\ PLANO$$

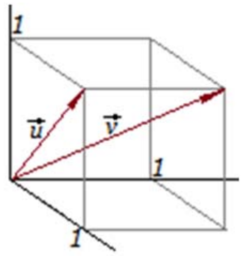
EL ESPACIO EUCLÍDEO

94. Comprueba que los tres productos escalares de los vectores de la base por sí mismos dan la unidad.

$$(1,0,0)\cdot(1,0,0) = 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 1$$
$$(0,1,0)\cdot(0,1,0) = 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 = 1$$
$$(0,0,1)\cdot(0,0,1) = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1$$

95. Verifica que los tres productos escalares de dos vectores distintos de la base son nulos.

$$(1,0,0)\cdot(0,1,0) = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 = 0$$
$$(1,0,0)\cdot(0,0,1) = 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$$
$$(0,1,0)\cdot(0,0,1) = 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$$



96. Halla el producto escalar de los dos vectores representados en la figura.

$$\vec{u} = (1,\quad 0,\quad 1) \qquad \vec{v} = (1,\quad 1,\quad 1)$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2$$

97. Calcula a y b en los vectores (1, 2, a) y (b, –1, 0), sabiendo que tienen producto escalar nulo y que las componentes primera y tercera de su suma coinciden.

La componentes primera y tercera de su suma coinciden: $1 + b = a + 0 \rightarrow a = b + 1$

Producto escalar nulo: $1\cdot b + 2\cdot(-1) + a\cdot 0 = b - 2 = 0 \rightarrow \underline{b = 2} \rightarrow a = 2 + 1 \rightarrow \underline{a = 3}$

98. Dada la recta r: (A, **u**) y el plano π: Ax + By + Cz + D = 0, ¿por qué es condición necesaria y suficiente para que sean paralelos que $Au_1 + Bu_2 + Cu_3 = 0$?

El vector $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ es director de la recta *r*. El vector $\vec{v} = (A, B, C)$ es característico del plano π, y por tanto perpendicular al mismo. Así pues, para que recta y plano sean paralelos, $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ deben ser perpendiculares y, por ende, su producto escalar debe ser nulo:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = Au_1 + Bu_2 + Cu_3 = 0$$

Recíprocamente, si $Au_1 + Bu_2 + Cu_3 = 0$, sugnifica que $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ son perpendiculares y entonces r y π son paralelos.

99. Halla la dirección de todos los clavos 'clavados derechos' en un tablero cuya ecuación es: $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y-1 & 0 & 1 \\ z+2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Desarrollamos el determinante para obtener la ecuación general del plano:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y-1 & 0 & 1 \\ z+2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} (y-1) + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} (z+2) = 0 \rightarrow -x + y + z + 1 = 0$$

La dirección pedida es la de un vector característico del plano, que puede obtenerse de los coeficientes de las variables en la ecuación general: $(-1, 1, 1)$

100. Halla los ángulos entre los planos siguientes:

a) π_1: x + y + z + 2 = 0, π_2: x – 2z = 0 b) π_1: 3x + 4z – 1 = 0, π_2: z = 0

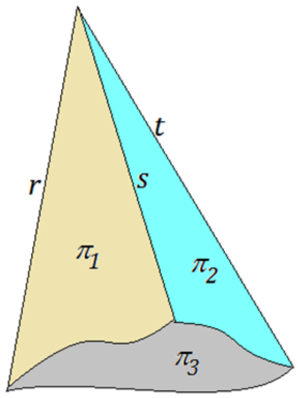
a) Calulamos el ángulo entre los vectores característicos de los planos:

$$\left.\begin{matrix} \vec{u} = (1,\quad 1,\quad 1) \\ \vec{v} = (1,\quad 0,\quad -2) \end{matrix}\right\} \rightarrow \quad \alpha = arc\ cos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = arc\ cos\frac{-1}{\sqrt{15}} \cong 105°$$

b) Análogamente:

$$\left.\begin{matrix} \vec{u} = (3,\quad 0,\quad 4) \\ \vec{v} = (0,\quad 0,\quad 1) \end{matrix}\right\} \rightarrow \quad \alpha = arc\ cos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = arc\ cos\frac{4}{5} \cong 37°$$

101. Considera el ángulo triedro de aristas: r: x = y = z; s: x = y/2 = z/3 y t: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$. Halla lo que miden sus tres ángulos diedros.



En primer lugar asociamos a cada recta un punto propio y un vector director:

$$r: \begin{cases} A = (0, \quad 0, \quad 0) \\ \vec{u} = (1, \quad 1, \quad 1) \end{cases} \quad s: \begin{cases} A = (0, \quad 0, \quad 0) \\ \vec{v} = (1, \quad 2, \quad 3) \end{cases} \quad t: \begin{cases} A = (0, \quad 0, \quad 0) \\ \vec{w} = (1, \quad -1, \quad 2) \end{cases}$$

Calculamos las ecuaciones de los tres planos del triedro:

$$\pi_1: \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 2 \\ z & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \to x - 2y + z = 0 \to \vec{a} = (1, \quad -2, \quad 1)$$

$$\pi_2: \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 2 & -1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \to 7x + y - 3z = 0 \to \vec{b} = (7, \quad 1, \quad -3)$$

$$\pi_3: \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \to 3x - y - 2z = 0 \to \vec{c} = (3, \quad -1, \quad -2)$$

Donde $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores característicos de los tres planos.

$$\widehat{\pi_1, \pi_2} = arc\ cos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = arc\cos \frac{1 \cdot 7 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{59}} = arc\cos \frac{2}{\sqrt{354}} \cong 84°$$

$$\widehat{\pi_1, \pi_3} = arc\ cos \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = arc\cos \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = arc\cos \frac{3}{2\sqrt{21}} \cong 77°$$

$$\widehat{\pi_2, \pi_3} = arc\ cos \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = arc\cos \frac{7 \cdot 3 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{14}} = arc\cos \frac{26}{\sqrt{826}} \cong 86°$$

102. Comprueba que la proyección ortogonal del origen de coordenadas sobre el plano π: x + 2y + 3z – 4 = 0 es el punto O’(2/7, 4/7, 6/7)

Ecuaciones de la recta perpendicular al plano que pasa por el origen: $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$

$$O' = r \cap \pi: \quad t + 2 \cdot 2t + 3 \cdot 3t - 4 = 0 \to 14t - 4 = 0 \to t = \frac{2}{7} \to O' = \left(\frac{2}{7}, \quad \frac{4}{7}, \quad \frac{6}{7}\right)$$

103. Calcula qué ángulo forman el plano 3x + y – 2z = 0 y la recta r: $\begin{cases} x - 2y - 8 = 0 \\ 3y + z + 8 = 0 \end{cases}$

Vector característico del plano: $\vec{u} = (3, \quad 1, \quad -2)$. Tomando y como parámetro: $r \equiv \begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = t \\ z = -8 - 3t \end{cases}$

De manera que un vector director de la recta es: $\vec{v} = (2, \quad 1, \quad -3)$

El ángulo que forman la recta y el plano es el complementario del que forman estos dos vectores:

$$\widehat{r, \pi} = arc\ sen \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = arc\ sen \frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = arc\ sen \frac{13}{14} \cong 68°$$

104. Calcula el perímetro de un paralelogramo ABCD, siendo tres de sus vértices los puntos A(0, 0, 3), B(1, 2, 3) y C(0, 4, 3).

$$|AB| = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{5} \quad |BC| = \sqrt{(0-1)^2 + (4-2)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{5}$$

$$Perímetro = 2\left(\sqrt{5} + \sqrt{5}\right) = 4\sqrt{5}\ u^2$$

105. Una pirámide tiene su base de 4 cm^2 sobre el plano x + y + z = 1, y su vértice o cúspide es el punto V(3, 3, 3). Halla su volumen.

La altura es la distancia del punto V al plano:

$$h = d(V,\pi) = \frac{|3+3+3-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{3}}\ cm \rightarrow Volumen = \frac{1}{3}\cdot 4\cdot \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{32\sqrt{3}}{9}\ \ cm^3$$

106. Calcula las distancias entre los siguientes elementos:
a) El punto P(1, 0, 1) y la recta r: x = y = (z + 2)/2;
b) Las rectas r: x = y = z + 2 y s: x = y – 1 = z
c) Los planos π_1: 3x + 4y + 12z – 3 = 0 y π_2: 3x + 4y + 12z + 2 = 0.

a) Asociamos a la recta un punto y un vector director: $r: \begin{cases} Q = (0,0,-2) \\ \vec{u} = (1,1,2) \end{cases}$

$$d(P,r) = \frac{|\vec{u}\wedge\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{u}|} = \frac{\left\|\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \frac{|(-3,\ \ 1,\ \ 1)|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{(-3)^2+1^2+1^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{66}}{6}\ \ u$$

b) La pregunta tiene sentido porque las rectas son paralelas. Tomamos un punto de una de ellas y calculamos la distancia a la otra como se ha hecho en el apartado anterior.

$$r: \begin{cases} P = (0,0,-2) \\ \vec{u} = (1,1,1) \end{cases} \quad s: \begin{cases} Q = (0,1,0) \\ \vec{u} = (1,1,1) \end{cases}$$

$$d(r,s) = \frac{|\vec{u}\wedge\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{u}|} = \frac{\left\|\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|(-1,\ \ 0,\ \ 1)|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}\ \ u$$

c) Se trata de dos planos paralelos. Basta hallar la diferencia de las distancias del origen de coordenadas a cada uno de ellos:

$$d(\pi_1,\pi_2) = \frac{2}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}} - \frac{-3}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}} = \frac{5}{13}\ \ u$$

Para cada uno de los tres apartados hay otras alternativas:

a) Hallar la ecuación del plano π perpendicular a r que contenga a P. Encontrar el punto Q de intersección de r con π, y luego la distancia entre P y Q.

b) Elegir un punto cualquiera de una de las rectas y calcular la distancia a la otra.

c) Elegir un punto de uno de los planos, [por ejemplo de π_1, tomando $y = 0$, se tiene $3x + 12z - 3 = 0$, o sea, $x = 1 - 4z$, con lo que podría ser $P(1, 0, 0)$] y calcular su distancia al otro.

107. Calcula el producto vectorial de los vectores **p**(1, 2, 3) y **q**(0, 1, 2).

$$\vec{p}\wedge\vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = (1,\ \ -2,\ \ 1)$$

108. Dados **p**(0, 1, 2) y **q**(-1, 0, -1), calcula **pXq** y **qXp** y comprueba que se obtienen vectores opuestos.

$$\vec{p}\wedge\vec{q}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{k}=(-1,\quad -2,\quad 1)$$

$$\vec{q}\wedge\vec{p}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=(1,\quad 2,\quad -1)$$

109. Comprueba la no asociatividad del producto vectorial con los vectores **p**(1, 2, 0), **q**(1, -1, 3) y **r**(1, 1, 0)

$$\vec{p}\wedge\vec{q}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=(6,\quad -3,\quad -3)\to(\vec{p}\wedge\vec{q})\wedge\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 6 & -3 & -3\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=(3,\quad -3,\quad 9)$$

$$\vec{q}\wedge\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=(-3,\quad 3,\quad 2)\to\vec{p}\wedge(\vec{q}\wedge\vec{r})=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 0\\ -3 & 3 & 2\end{vmatrix}=(4,\quad -2,\quad 9)$$

Evidentemente los resultados no son iguales: $(\vec{p}\wedge\vec{q})\wedge\vec{r}\neq\vec{p}\wedge(\vec{q}\wedge\vec{r})$

110. Halla el producto vectorial de los vectores ortogonales **v**(a, 1, 0) y **w**(1, 0, 1)

$$\vec{v}\wedge\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ a & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}a & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}a & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{k}=(1,\quad -a,\quad -1)$$

111. Escribe la ecuación de un plano que pasa por el origen y tiene dos direcciones **u**(1, 1, 3) y **v**(0, -2, 1).

$$\pi\equiv\begin{vmatrix}x & 1 & 0\\ y & 1 & -2\\ z & 3 & 1\end{vmatrix}=0\to\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}x-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}y+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix}z=0\to 7x-y-2z=0$$

112. Expresa en forma paramétrica y continua la ecuación de la recta $r\equiv\begin{cases}x+y+2=0\\ y+z-1=0\end{cases}$

Como la variable y se repite en ambas ecuaciones, la tomamos como parámetro: $\begin{cases}x=-2-t\\ y=\quad\ \ t\\ z=\ \ 1-t\end{cases}$

Despejando t e igualando: $\frac{x+2}{-1}=y=\frac{z-1}{-1}$

113. Analiza qué diferencia esencial hay entre los productos escalar y vectorial.

Producto escalar: El resultado es un número. Es asociativo, conmutativo y distributivo.

Producto vectorial: El resultado es un vector. No es asociativo. Es anticonmutativo.

114. Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A(1, 0, 0), B(1, 1, 1) y C(0, 1, 0)

$$\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,\quad 1,\quad 1)\\ \overrightarrow{AC}=(-1,\quad 1,\quad 0)\end{array}\to Área=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}|(-1,\quad -1,\quad 1)|=\frac{\sqrt{3}}{2}\ u^2$$

115. Idem con los vértices O(0, 0, 0), A(1, 1, 1) y C(0, 1, 2).

$$\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}=(1,\quad 1,\quad 1)\\ \overrightarrow{OC}=(0,\quad 1,\quad 2)\end{array}\to Área=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}|(1,\quad -2,\quad 1)|=\frac{\sqrt{6}}{2}\ u^2$$

116. Un rombo tiene de vértices los puntos A(1, 4, 1), B(3, 1, 1), C(5, 4, 1) y D(3, 7, 1). Halla su área, usando la fórmula $S = \frac{\Delta \cdot \delta}{2}$ y también descomponiéndolo en triángulos. Comprueba la igualdad de los resultados.

I) Suponemos que los vértices están nombrados en orden consecutivo.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta = d(A,C) = \sqrt{(5-1)^2+(4-4)^2+(1-1)^2} = 4 \\ \delta = d(B,D) = \sqrt{(3-3)^2+(7-1)^2+(1-1)^2} = 6\end{array}\right. \to S = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12\ u^2$$

II) $$\Delta ABD: \begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (2, \quad -3, \quad 0) \\ \overrightarrow{AD} = (2, \quad 3, \quad 0)\end{array} \to Área = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 0\end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}|(0, \quad 0, \quad 12)| = \frac{12}{2} = 6\ u^2$$

Como se trata de un rombo, por simetría: $S = 6 \cdot 2 = 12\ u^2$

117. ¿Qué puede deducirse del resultado |**p**×**q**| = |**p**|·|**q**|, respecto de los vectores **p** y **q**?

Puesto que $|\vec{p} \wedge \vec{q}| = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot sen(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) \to sen(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = 1$.

Por tanto, los vectores son perpendiculares.

118. El área de una elipse es el doble de la del círculo que proyecta ortogonalmente sobre un plano π. Calcula el ángulo que forma el plano de la elipse con π.

El valor de la proyección se obtiene multiplicando por el coseno del ángulo que forman. Por tanto, se sabe que cosα = ½ → α = 60°.

119. Calcula la distancia mínima entre las rectas que se cruzan:

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - z + 7 = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x + y + z - 6 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Nos facilitará la obtención de datos pasar a paramétricas las ecuaciones de ambas rectas, y asociaremos punto y vector director a cada una de ellas:

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\lambda \\ z = 7 + 2\lambda \end{cases} \to \begin{cases} P = (0, \frac{7}{2}, 7) \\ \vec{u} = (2, 3, 4) \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu \\ z = 6 - 3\mu \end{cases} \to \begin{cases} Q = (0,0,6) \\ \vec{v} = (1,1,-3) \end{cases}$$

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \quad \vec{u} \quad \vec{v}|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|} = \frac{\left\|\begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ -\frac{7}{2} & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{matrix}\right\|} = \frac{34}{|(-13, \quad 10, \quad -1)|} = \frac{34}{\sqrt{270}} = \frac{17\sqrt{30}}{45}\ u$$

FUNCIONES

120. Ordena de menor a mayor los números: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\frac{13}{9}$, $1{,}4142$ $1{,}414\widehat{2}$, $1,\widehat{4142}$

Por cálculo aproximado se tiene que $\sqrt{2} \cong 1.41421356 \ldots$ $\sqrt[3]{3} \cong 1.44224957 \ldots$ $\frac{13}{9} = 1,\hat{4}$

Así pues: $1{,}4142 < \sqrt{2} < 1,\widehat{4142} < 1{,}414\widehat{2} < \sqrt[3]{3} < \frac{13}{9}$

121. Dados los conjuntos A = (1, 2), B = [1, 2], C = {1, 2}, halla A∪B, A∪C, B∪C, A∩B, A∩C, B∩C, B – A, B – C, A – C.

A∪B = B A∪C = B B∪C = B A∩B = A A∩C = ∅
B∩C = C B – A = C B – C = A A – C = A

122. Escribe como intervalos y como entornos los siguientes conjuntos:

a) (–2, 5) d) $E_{0,01}(-7)$ g) $\{x \in \mathbb{R} / |x-3| < 2\}$

b) (–2, +∞) e) $E_7(\infty)$ h) $\{x \in \mathbb{R} / x < -2\}$

c) (–2, 3) ∪ (3, 8) f) $E_{0,1}^*(0,1)$ i) $\{x \in \mathbb{R} / |x+3| < 0{,}2\}$

a) $(-2,5) = E_{3,5}(1{,}5)$ b) $(-2,+\infty)$ *No hay* c) $(-2,3) \cup (3,8) = E_5^*(3)$

d) $E_{0,01}(-7) = (-7{,}01, -6{,}99)$ e) $E_7(\infty)$ *No hay* f) $E_{0,1}^*(0{,}1) = (0, 0.1) \cup (0.1, 0.2)$

g) $\{x \in \mathbb{R} / |x-3| < 2\} \to -2 < x-3 < 2 \to 1 < x < 5 \to (1,5) = E_2(3)$

h) $\{x \in \mathbb{R} / x < -2\} = (-\infty, -2)$ *No hay entorno*

i) $\{x \in \mathbb{R} / |x+3| < 0{,}2\} \to -0.2 < x+3 < 0.2 \to -3.2 < x < -2.8 \to (-3.2, -2.8) = E_{0.2}(-3)$

123. Halla la intersección de los entornos $E_{0,01}(4)$ y $E_{0,05}(4{,}05)$ y después un entorno contenido en dicha intersección.

$$\begin{matrix} E_{0.01}(4) = (3.99, 4.01) \\ E_{0.05}(4.05) = (4, 4.1) \end{matrix} \to E_{0.01}(4) \cap E_{0.05}(4.05) = [4, 4.01) \quad E_{0.005}(4.005) \subset E_{0.01}(4) \cap E_{0.05}(4.05)$$

124. Calcula los valores de x que verifican las siguientes igualdades y desigualdades :

a) |x + 7| = 10 b) |x + 7| < 10 c) |x – 1| + |x + 1| < 2 d) |x – 1| · |x + 1| = 1

a) $|x+7| = 10 \to \begin{cases} x+7 = -10 \to x = -17 \\ x+7 = 10 \to x = 3 \end{cases} \to x \in \{-17, 3\}$

b) $|x+7| < 10 \to -10 < x+7 < 10 \to -17 < x < 3 \to x \in (-17, \ 3)$

c) $|x-1| + |x+1| < 2 \to \begin{cases} -(x-1) - (x+1) < 2 & x \in (-\infty, -1) \\ -(x-1) + (x+1) < 2 & x \in [-1, 1] \\ (x-1) + (x+1) < 2 & x \in (1, +\infty) \end{cases} \to$

$$\to \begin{cases} -2x < 2 \to x > -1 \to x \in (-1, +\infty) & x \in (-\infty, -1) \\ 2 < 2 \to \emptyset & x \in [-1, 1] \\ 2x < 2 \to x < 1 \to x \in (-\infty, 1) & x \in (1, +\infty) \end{cases} \to CONTRADICTORIO \to \emptyset$$

d) $|x-1| \cdot |x+1| = 1 \to \begin{cases} (x-1) \cdot (x+1) = 1 & x \in (-\infty, -1) \\ -(x-1) \cdot (x+1) = 1 & x \in [-1, 1] \\ (x-1) \cdot (x+1) = 1 & x \in (1, +\infty) \end{cases} \to$

$$\to \begin{cases} x^2 - 1 = 1 \to x^2 = 2 \to x = -\sqrt{2} & x \in (-\infty, -1) \\ 1 - x^2 = 1 \to x = 0 & x \in [-1, 1] \\ x^2 - 1 = 1 \to x^2 = 2 \to x = \sqrt{2} & x \in (1, +\infty) \end{cases} \to x \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$$

125. Dadas las funciones $f(x)=\sqrt{x^2+3}$ y $g(x)=\frac{x}{x-1}$, halla $f\circ g$ y $g\circ f$.

$$f\circ g\,(x)=f[g(x)]=\sqrt{\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+3}=\sqrt{\frac{4x^2-6x+3}{(x-1)^2}}=\frac{\sqrt{4x^2-6x+3}}{|x-1|}$$

$$g\circ f\,(x)=g[f(x)]=\frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}-1}$$

126. Dada la función $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, halla su inversa f^{-1}, determina si es una función y comprueba que $f^{-1}[f(x)]=x, \forall x\neq 1$

Cambiamos los nombres de las variables y despejamos y:

$$x=\frac{y+1}{y-1}\rightarrow x(y-1)=y+1\rightarrow (x-1)y=x+1\rightarrow y=\frac{x+1}{x-1}\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

Es decir, es una función AUTOINVERSA. Si $x\neq 1$:

$$f^{-1}[f(x)]=\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}=\frac{x+1+x-1}{x+1-x+1}=\frac{2x}{2}=x$$

LÍMITES

127. Dada la función $f(x)=\begin{cases}x^2 & si \quad x\leq 2\\ 4 & si \quad x>2\end{cases}$, halla un entorno reducido de x = 2 cuyos elementos tengan imágenes en $E_{0,01}(4)$

$$3.99<f(x)<4.01\leftrightarrow 3.99<x^2<4.01\leftrightarrow 1.997\ldots<x<2.002\ldots$$

Por tanto, bastará tomar $x\in E^*_{0.02}(2)$

128. Escribe las asíntotas verticales y horizontales de las funciones: $a)\ y=\frac{1}{x}\quad b)\ y=\frac{x}{x-1}$

$a)\qquad AV:\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty\rightarrow x=0\qquad AH:\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0\rightarrow y=0$

$b)\qquad AV:\ \lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}=\infty\rightarrow x=1\quad AH:\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=1\rightarrow y=1$

129. Calcula $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x=(1^\infty\ IND.)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2x+3}{2x-1}-1\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{4}}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right]^{\frac{4x}{2x-1}}=\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{4}}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right]^{\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x-1}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x-1}}=e^2$$

En general, si $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, $\lim_{x\to a}f(x)=1$ $\lim_{x\to a}g(x)=+\infty$:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{1}{1/[f(x)-1]}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{g(x)[f(x)-1]}=e^{\lim_{x\to a}g(x)[f(x)-1]}$$

130. Calcula $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\ IND\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-\frac{1}{e^x}}{e^x+\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\ IND\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-\frac{1}{e^x}}{e^x+\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

CONTINUIDAD

131. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$a)\ y=\frac{1}{x^3-3x^2+2x}\qquad b)\ y=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\qquad c)\ y=\ln|x|\qquad d)\ y=\frac{1}{tg^2x-1}$$

a) Como cociente de dos funciones polinómicas, basta encontrar los ceros del denominador para localizar los puntos de discontinuidad:

$$x^3-3x^2+2x=x(x^2-3x+2)=x(x-1)(x-2)=0\leftrightarrow x=0\vee x=1\vee x=2$$

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}-\{0,1,2\}$

b) Además de tener en cuenta que el denominador no puede anularse, el radicando ha de ser no negativo:

$$\frac{x+1}{x-1}\geq 0\leftrightarrow\begin{cases}x+1\leq 0\wedge x-1<0\to x\in(-\infty,-1]\\ x+1\geq 0\wedge x-1>0\to x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

Por tanto, el dominio de continuidad de la función es $(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)$

c) Los logaritmos solo se pueden calcular para cantidades positivas, así que el dominio de continuidad de esta función es $\mathbb{R}-\{0\}$

d) Nuevamente hay que estudiar los ceros del denominador:

$$tg^2x-1=0\leftrightarrow tgx=\pm1\leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}=\frac{2k+1}{4}\pi,k\in\mathbb{Z}$$

También habría que excluir los valores donde no se puede calcular la tangente, es decir, en todos los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$.

Así pues, el dominio de continuidad es $\mathbb{R}-\left\{\frac{2k+1}{4}\pi,\frac{2k+1}{2}\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$

132. Analiza qué tipo de discontinuidades presentan las siguientes funciones:

$$a)\ y=E(x)\qquad b)\ y=\begin{cases}1 & si\quad x\in\mathbb{Z}\\ 0 & si\quad x\notin\mathbb{Z}\end{cases}\qquad c)\ y=\frac{x+1}{x^2+x}$$

a) E(x) es la función 'parte entera' de *x*. Es una función escalonada. Sólo toma valores enteros. Por tanto tiene una discontiuidad de salto finito en cada número entero.

b) Es la función característica de los números enteros. Tiene una discontinuidad evitable en cada valor entero puesto que los límites laterales son nulos.

c) Tiene una discontinuidad evitable en x = −1, y una de salto infinito en x = 0, ya que $x^2+x=x(x+1)\to\frac{x+1}{x^2+x}=\frac{x+1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}$

133. La función f(x) = xsen(π/x) presenta una discontinuidad evitable en x = 0. Intenta justificarlo calculando el valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Por una parte, $\lim_{x\to 0}\frac{\pi}{x} = \pm\infty$, y los valores de $sen\frac{\pi}{x}$ irían fluctuando entre –1 y 1. Es decir, es una cantidad acotada multiplicada por otra que tiende a cero. Por tanto:

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot sen\frac{\pi}{x}\right) = 0$$

Este resultado se verifica tanto a la izquierda como a la derecha de cero. En cambio, la función NO está definida para x = 0. Así pues, se trata de una discontinuidad evitable.

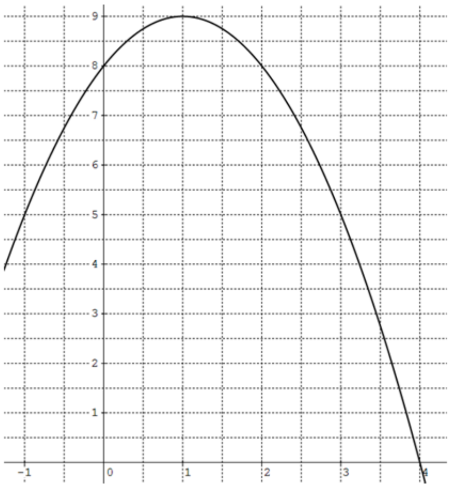
134. Aplica el teorema de Bolzano a la función y = x^7 + x + 2 en el intervalo [–2, 2] comprobando la hipótesis y la tesis.

HIPÓTESIS: 1) Es una función continua en todo ℝ por ser polinómica. En particular en [–2, 2]
2) $f(-2) = (-2)^7 - 2 + 2 = -128 \quad f(2) = 2^7 + 2 + 2 = 132 \quad f(-2)\cdot f(2) < 0$

TESIS: $\exists c \in (-2, 2) / f(c) = 0$

En efecto, es fácil observar que $-1 \in (-2, 2)/f(-1) = (-1)^7 + (-1) + 2 = 0$

135. Aplica el teorema de Weierstrass a la función y = 8 + 2x – x^2 en el intervalo [–1, 4], comprobando la hipótesis y la tesis.



HIPÓTESIS: Es una función continua en todo ℝ por ser polinómica. En particular en [–1, 4]

TESIS: La función alcanza un mínimo absoluto y un máximo absoluto dentro de [–1, 4]

La función es cuadrática. Su gráfica es una parábola con vértice en el punto (1, 9), y se trata de un máximo relativo ya que el coeficiente de x^2 es negativo. Los extremos absolutos pueden alcanzarse en los extremos del intervalo: $f(-1) = 5 \quad f(4) = 0$.

Por tanto, el mínimo absoluto se alcanza en x = 4, y su valor es 0. El máximo absoluto se alcanza en x = 1, y su valor es 9.

136. Halla la imagen de [0, π] de la función y = senx. Idem con (0, π).

a) Nos basamos en el teorema de Wierstrass, que es aplicable por tratarse de una función continua en un intervalo cerrado. Alcanza el mínimo en los extremos: $sen(0) = sen(\pi) = 0$ y el máximo en el punto medio: $sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Por tanto la imagen de [0, π] es [0, 1]

b) Aunque no sea aplicabele el mismo teorema por no ser un intervalo cerrado, el conocimiento de la función nos lleva a entender que la imagen de (0, π) es (0, 1].

DERIVACIÓN

137. Halla la derivada de la función f(x) = x^2 + 4x – 5 en los puntos x = 1 y x = –2.

$$f'(x) = 2x + 4 \to \begin{cases} f'(1) = 2\cdot 1 + 4 = 6 \\ f'(-2) = 2\cdot(-2) + 4 = 0 \end{cases}$$

138. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola y = x^2 – x en el punto x = 1.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $x = a$ viene dada pòr:

$$y = f'(a)\cdot(x - a) + f(a)$$

$$\begin{matrix} f'(x) = 2x - 1 \\ f'(1) = 2\cdot 1 - 1 = 1 \end{matrix} \to y = 1\cdot(x-1) + f(1) \to y = x - 1$$

139. Halla la ecuación de la recta tangente a y = $\sqrt{x}$ en x = 4.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad y'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} \quad y(4) = \sqrt{4} = 2 \quad y = \frac{1}{4}(x-4) + 2 \rightarrow y = \frac{1}{4}x + 1$$

140. Calcula la función derivada de y = $\sqrt{x}$. ¿Existe f ‘(0)?

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

No está definida para x = 0 (denominador no puede anularse). Por tanto no existe $f'(0)$

141. Utiliza la derivación logarítmica para encontrar la derivada de la función f(x) = x^x.

$$y = x^x \rightarrow \ln y = \ln(x^x) = x \cdot \ln x$$

Derivamos la última igualdad:

$$\frac{y'}{y} = (x \cdot \ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \rightarrow y' = y(\ln x + 1) \rightarrow y' = x^x(\ln x + 1)$$

142. Deriva en forma implícita las funciones a) $x^2 + y^2 + 3xy - 7 = 0$ b) $2^x y^2 + 2^y x^2 = 0$

$$a) \quad 2x + 2yy' + 3y + 3xy' = 0 \rightarrow (3x + 2y)y' = -(2x + 3y) \rightarrow y' = -\frac{2x + 3y}{3x + 2y}$$

$$b) \quad 2^x y^2 \ln 2 + 2^{x+1} yy' + 2^y y' x^2 ln2 + 2^{y+1} x = 0 \rightarrow (2^{x+1} y + 2^y x^2 ln2)y' = -(2^x y^2 \ln 2 + 2^{y+1} x)$$

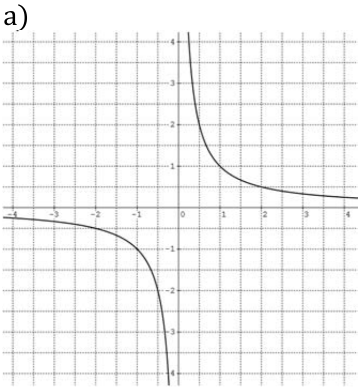
$$\rightarrow y' = -\frac{2^x y^2 \ln 2 + 2^{y+1} x}{2^{x+1} y + 2^y x^2 ln2}$$

143. Analiza la monotonía de las funciones

$a)\ y = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $b)\ y = \log_2 x$ $\qquad$ $c)\ \ y = sen\, x$

Compara los resultados analíticos con las gráficas de estas funciones.

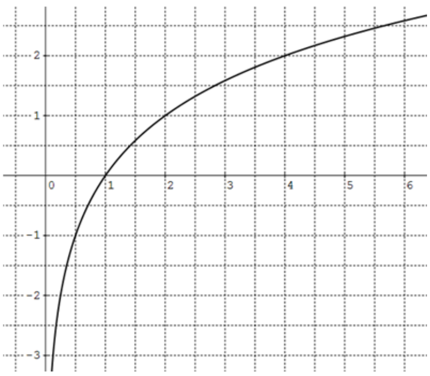
a)



$$y = -\frac{1}{x^2} < 0, \forall x \neq 0$$

Por tanto, la función es siempre DECRECIENTE

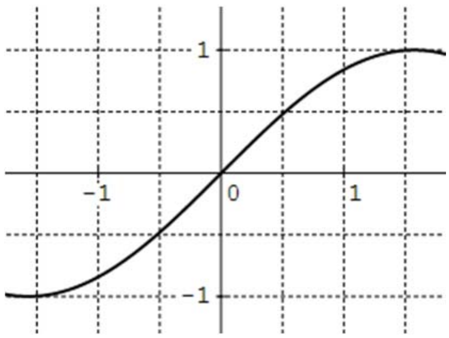
b)



$$y' = \frac{1}{x \cdot \ln 2}$$

Como la función logarítmica solo está definida para valores positivos de *x*, la derivada es siempre positiva y por tanto, la función es siempre CRECIENTE.

c)



$$y' = cosx = 0 \leftrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$cosx < 0 \leftrightarrow x \in \left((4k-3)\frac{\pi}{4}, (4k-1)\frac{\pi}{4}\right)$$

$$cosx > 0 \leftrightarrow x \in \left((4k-1)\frac{\pi}{4}, (4k+1)\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{DECRECE si } x \in \left((4k-3)\tfrac{\pi}{4}, (4k-1)\tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{CRECE si } x \in \left((4k-1)\tfrac{\pi}{4}, (4k+1)\tfrac{\pi}{4}\right)$$

144. Halla los extremos locales y los intervalos de monotonía de las funciones:
a) $y = x^3 - 6x^2 + 12$ b) $y = \cos x - \operatorname{sen} x$, $x \in [0, 2\pi)$.

a) $y' = 3x^2 - 12x \quad y'' = 6x - 12 \quad \begin{cases} y' = 0 \leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0 \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \\ y''(0) = -12 < 0 \rightarrow Máximo \quad y''(4) = 12 > 0 \rightarrow Mínimo \end{cases}$

Por tanto, la función tiene un MÁXIMO RELATIVO en $(0, \ f(0)) = (0, \ 12)$ y tiene un MÍNIMO RELATIVO en $(4, \ f(4)) = (4, \ -20)$

Entonces, es CRECIENTE EN $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y es DECRECIENTE en $(0, 4)$.

b) $y' = -(senx + cosx) \quad y'' = -cosx + senx \quad \begin{cases} y' = 0 \leftrightarrow senx + cosx = 0 \leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} \\ x = \frac{7\pi}{4} \end{cases} \\ y''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} > 0 \rightarrow Mín. \quad y''\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} < 0 \rightarrow Máx \end{cases}$

Por tanto, la función tiene un MÍNIMO RELATIVO en $\left(\frac{3\pi}{4}, \ f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{3\pi}{4}, \ -\sqrt{2}\right)$ y tiene un MÁXIMO RELATIVO en $\left(\frac{7\pi}{4}, \ f\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{7\pi}{4}, \ \sqrt{2}\right)$

Entonces, es DECRECIENTE en $[0, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$ y es CRECIENTE en $(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$.

145. Estudia si es aplicable el teorema de Rolle a las siguientes funciones. En caso afirmativo halla los puntos del intervalo cuya derivada se anula: a) $y = |x|$ en $[-2, 2]$ b) $y = \operatorname{sen}x\cos x$ en $[0, \pi/2]$

a) HIPÓTESIS: La función es continua en $[-2, 2]$, pero NO es derivable en $x = 0 \in (-2, 2)$.

Así pues NO podemos aplicar el teorema de Rolle. No se puede afirmar ni negar si se cumple la tesis basándonos en el teorema.

No obstante, por conocimiento adicional de la función, sabemos que su derivada vale -1 en el intervalo $(-2, 0)$ y vale 1 en el intervalo $(0, 2)$. Es decir, su derivada no se anula en ningún punto del intervalo.

b) HIPÓTESIS: La función es continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ por ser producto de funciones continuas y derivables en todos los números reales, o sea, es derivable en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Por otra parte, $f(0) = sen(0) \cdot \cos(0) = 0 = sen\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Es decir, se cumplen las hipótesis del teorema. Por tanto ha de verificarse la

TESIS: $\exists c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) / f'(c) = 0$

Localicemos ahora este valor c.

$$y = senx \cdot cosx = \frac{1}{2} sen(2x) \rightarrow y' = \cos(2x) \quad \cos(2x) = 0 \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

146. Utilizando la regla de L´Hôpital, calcula:

$a) \lim_{x\to 0} \frac{1 - cosx}{x^2} \qquad b) \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{e^x} \qquad c) \lim_{x\to 0} \frac{\ln(cosx)}{x^2}$

$$a) \lim_{x\to 0} \frac{1 - cosx}{x^2} = \left(\frac{0}{0} \ L'H\right) = \lim_{x\to 0} \frac{senx}{2x} = \left(\frac{0}{0} \ L'H\right) = \lim_{x\to 0} \frac{cosx}{2} = \frac{1}{2}$$

$$b) \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \ L'H\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \ L'H\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{6x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \ L'H\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{6}{e^x} = 0$$

$$c) \lim_{x\to 0} \frac{\ln(cosx)}{x^2} = \left(\frac{0}{0} \ L'H\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-\text{tgx}}{2\text{x}} = \left(\frac{0}{0} \ L'H\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-1 - \text{tg}^2\text{x}}{2} = -\frac{1}{2}$$

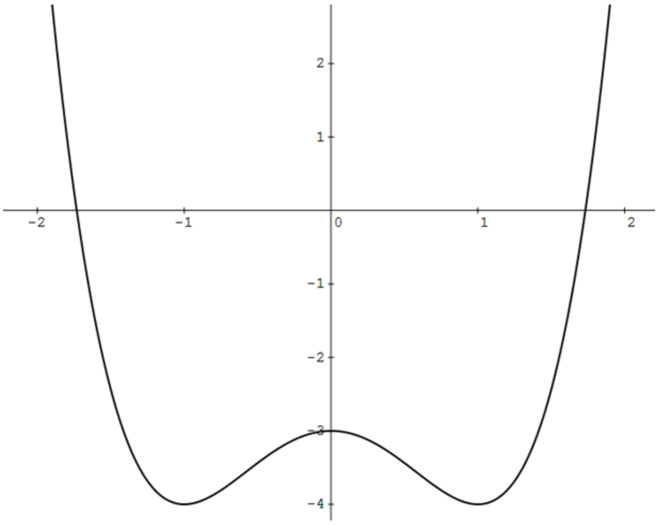
147. Estudia la concavidad, convexidad e inflexiones de f(x)= $x^4 - 2x^2 - 3$.

Se trata de una función polinómica; por tanto es continua y derivable cuantas veces queramos.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \quad f''(x) = 12x^2 - 4 \quad f''(x) = 0 \leftrightarrow 12x^2 - 4 = 0 \leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f'''(x) = 24x \rightarrow f'''\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \neq 0 \rightarrow PUNTOS\ DE\ INFLEXIÓN: \begin{cases} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{32}{9}\right) \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{32}{9}\right) \end{cases}$$

La derivada segunda es una función cuadrática que toma valores negativos en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, por tanto, la función es CONVEXA en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ y es CÓNCAVA en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.



148. Estudia y representa gráficamente las funciones:

$a)\ f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ $\qquad b)\ f(x) = \frac{x}{\ln x}$

$a)\ f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

$1.\ \mathcal{D}f = \mathbb{R} - \{x/x^2 - 1 = 0\} = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

Es continua en este dominio, por ser cociente de funciones continuas (polinómicas)

2. Estudiamos los puntos de corte con los ejes y signos de la función:

Corte con OY: $x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{0^3}{0^2-1} = 0 \rightarrow (0, 0)$

Corte con OX: $y = 0 \rightarrow \frac{x^3}{x^2-1} = 0 \rightarrow x^3 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

Signos de la función: $\begin{cases} x \in (-\infty, -1) \rightarrow \frac{negativo}{positivo} = negativo \\ x \in (-1, 0) \rightarrow \frac{negativo}{negativo} = positivo \\ x \in (0, 1) \rightarrow \frac{positivo}{negativo} = negativo \\ x \in (1, +\infty) \rightarrow \frac{positivo}{positivo} = positivo \end{cases}$

3. Simetrías: $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -f(x) \rightarrow FUNCIÓN\ IMPAR$

4. Asíntotas:

Asíntotas verticales:
$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty \quad \lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = +\infty \quad x = -1$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = +\infty \quad x = 1$$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \pm\infty$ No hay asíntotas horizontales

Asíntotas oblicuas:
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$$
$$n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x}{x^2-1}\right) = 0$$
$$\to y = x$$

5. Monotonía y extremos relativos.

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} \quad f'(x) = 0 \leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3}$$

Puesto que $\frac{x^2}{(x^2-1)^2} > 0, \forall x \neq 1$, el signo de $f'(x)$ solo depende de $x^2 - 3$.

Así, $\begin{cases} x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \to f'(x) > 0 \to f\ es\ CRECIENTE \\ x \in \left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup (-1, 1) \cup \left(1, \sqrt{3}\right) \to f'(x) < 0 \to f\ es\ DECRECIENTE \end{cases}$

Por tanto, los extremos relativos son: $\begin{cases} MÁXIMO\ RELATIVO\colon \left(-\sqrt{3}, f\left(-\sqrt{3}\right)\right) = \left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \\ MÍNIMO\ RELATIVO\colon \left(\sqrt{3}, f\left(\sqrt{3}\right)\right) = \left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$

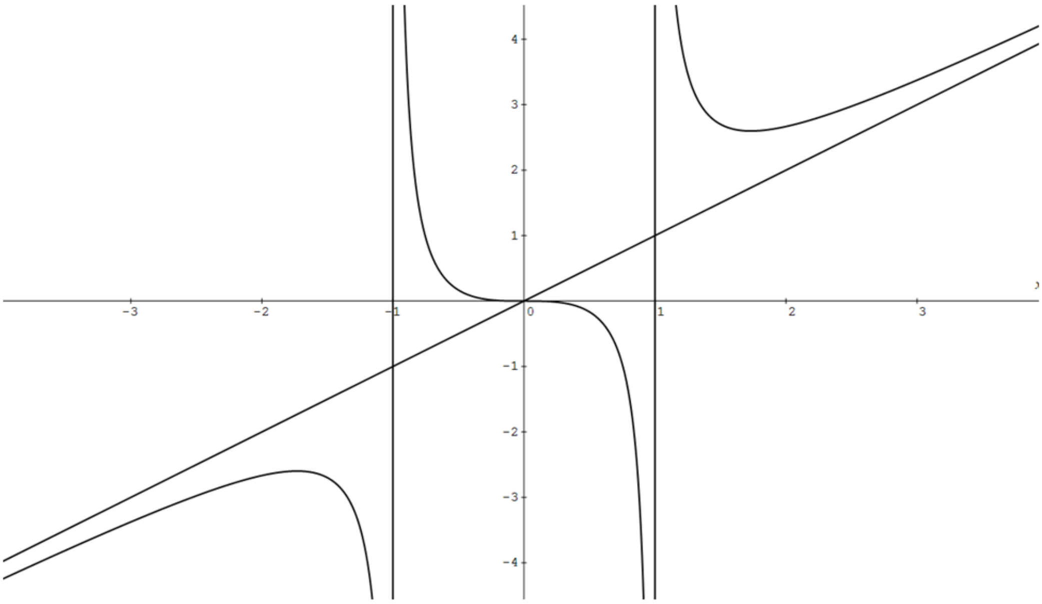
6. Curvatura e inflexión.

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} \quad f''(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda: $\begin{cases} x \in (-\infty, -1) \to f''(x) < 0 \to f\ CÓNCAVA \\ x \in (-1, 0) \to f''(x) > 0 \to f\ CONVEXA \\ x \in (0, 1) \to f''(x) < 0 \to f\ CÓNCAVA \\ x \in (1, +\infty) \to f''(x) > 0 \to f\ CONVEXA \end{cases}$

Así pues, el único punto de inflexión está en (0, 0)

Conjuntando todos estos resultados tenemos la gráfica:



$b)\ f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

1. $\mathcal{D}f = (0,1) \cup (1,+\infty)$

Es continua en este dominio: tiene una discontinuidad de salto finito puesto que $\ln 1 = 0$.

2. No hay puntos de corte con los ejes puesto que la función no está definida para x = 0.

Signos de la función: $\begin{cases} x \in (0,1) \to \ln x < 0 \to y\ negativa \\ x \in (1,+\infty) \to lnx > 0 \to y\ positiva \end{cases}$

3. Por la propia estructura del dominio no puede haber simetría par ni impar.

4. Asíntotas:

Asíntotas verticales: $\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{lnx} = -\infty \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{lnx} = -\infty$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{lnx} = \left(\frac{\infty}{\infty}\ L'H\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$

Por tanto NO hay asíntotas horizontales

Asíntotas oblicuas: $m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{lnx} = 0$ No hay asíntotas oblicuas.

Por otra parte: $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{lnx} = \frac{0^+}{-\infty} = 0^-$

5. Monotonía y extremos relativos. $f'(x) = \frac{lnx-1}{(lnx)^2} \quad f'(x) = 0 \leftrightarrow lnx = 1 \leftrightarrow x = e$

Así, $\begin{cases} x \in (0,\ 1) \to f'(x) < 0 \to f\ es\ DECRECIENTE \\ x \in (1,\ e) \to f'(x) < 0 \to f\ es\ DECRECIENTE \\ x \in (e,+\infty) \to f'(x) > 0 \to f\ es\ CRECIENTE \end{cases}$

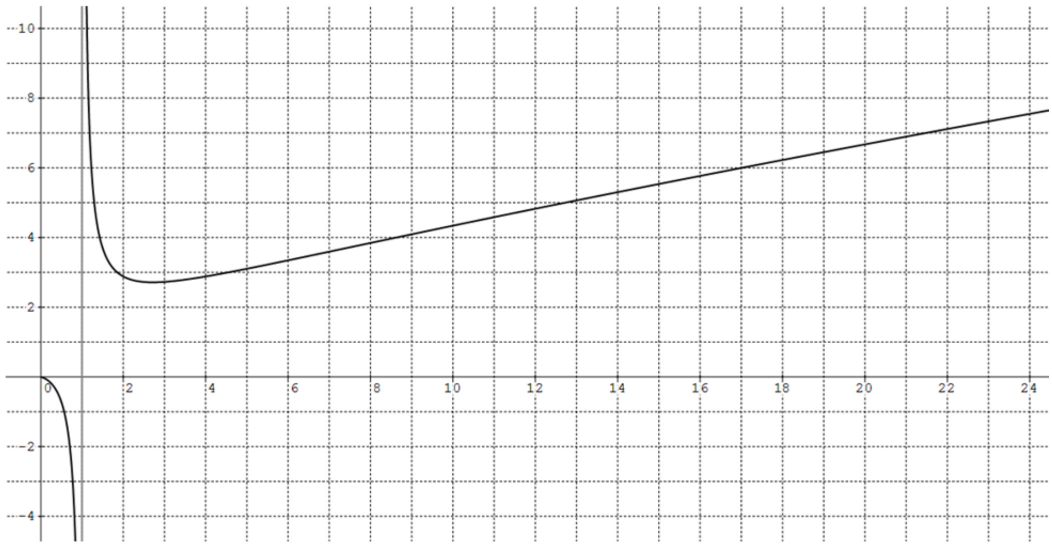
Por tanto, hay un MÍNIMO RELATIVO en $(e,\quad f(e)) = (e,\quad e)$

6. Curvatura e inflexión. $f''(x) = \frac{2-lnx}{x(lnx)^3} \quad f''(x) = 0 \leftrightarrow lnx = 2 \leftrightarrow x = e^2$

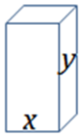
Estudiamos el signo de la derivada segunda: $\begin{cases} x \in (0,1) \to f''(x) < 0 \to f\ CÓNCAVA \\ x \in (1,\ e^2) \to f''(x) > 0 \to f\ CONVEXA \\ x \in (e^2,+\infty) \to f''(x) < 0 \to f\ CÓNCAVA \end{cases}$

Así pues, el único punto de inflexión está en $(e^2,\quad f(e^2)) = \left(e^2,\quad \frac{e^2}{2}\right)$

Conjuntando todos estos resultados tenemos la gráfica:



149. Se dispone de 6 m^2 de cartón para construir una caja con forma de prisma recto de base cuadrada con tapa. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para que el volumen encerrado sea máximo?



Generalmente manejaremos dos variables y dos funciones. Una función objetivo en la que habrá que buscar el óptimo (máximo o mínimo) y una función auxiliar que nos permite expresar una de las variables en función de la otra:

$$Función\ auxiliar:\ Área\ total = 2x^2 + 4xy = 6 \to y = \frac{6-2x^2}{4x} = \frac{3-x^2}{2x}$$

$$Función\ objetivo: Volumen = x^2y \to V(x) = x^2 \cdot \frac{3-x^2}{2x} = \frac{1}{2}(3x - x^3)$$

$$V'(x) = \frac{1}{2}(3-3x^2) \quad V'(x) = 0 \to \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{3-1^2}{2\cdot 1} = 1 \end{cases} \to \begin{cases} Lados\ de\ la\ base:\ 1\ m \\ Altura\ del\ prisma:\ 1\ m \end{cases}$$

Para comprobar que, efectivamente, se trata de un máximo:

$$V''(x) = -3x \quad V''(1) = -3 < 0 \to MÁXIMO\ RELATIVO$$

150. Disponemos de 400 m de alambre para cercar una finca rectangular. Halla los lados de dicho rectángulo para que el área encerrada sea máxima: a) si se necesita cercar los cuatro lados; b) si uno de los lados no necesita cerca porque hay una pared construida a la que adosamos el terreno.

a) Cercamos los cuatro lados.

$$Función\ auxiliar:\ Perímetro = 2x + 2y = 400 \to y = 200 - x$$
$$Función\ objetivo: Área = xy \to A(x) = x(200-x) = 200x - x^2$$

$$A'(x) = 200 - 2x \quad A''(x) = -2 < 0 \to MÁXIMO \quad A'(x) = 0 \leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 200 - 100 = 100 \end{cases}$$

Por tanto, la finca tiene dimensiones 100 m × 100 m.

b) Hay una pared construida y cercamos tres lados.

$$Función\ auxiliar:\ Perímetro = 2x + y = 400 \to y = 400 - 2x$$
$$Función\ objetivo: Área = xy \to A(x) = x(400-2x) = 400x - 2x^2$$

$$A'(x) = 400 - 4x \quad A''(x) = -4 < 0 \to MÁXIMO \quad A'(x) = 0 \leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 400 - 2\cdot 100 = 200 \end{cases}$$

Por tanto, la finca tiene dimensiones 100 m × 200 m.

151. Halla la velocidad y la aceleración de un movimiento rectilíneo que se rige mediante la ecuación: a) $s(t) = mt + n$ b) $s(t) = pt^2 + qt + r$.

a) $v(t) = s'(t) = m \quad a(t) = v'(t) = s''(t) = 0 \quad Movimiento\ uniforme$

b) $v(t) = s'(t) = 2pt + q \quad a(t) = v'(t) = s''(t) = 2p \quad Movimiento\ uniformemente\ acelerado$

INTEGRACIÓN

152. Calcular las siguientes integrales inmediatas:

$$a)\ \int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^4\sqrt[6]{x}}dx \qquad b)\ \int 2^x e^x dx$$

$$a)\ \int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^4\sqrt[6]{x}}dx = \int \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^4\cdot x^{\frac{1}{6}}}dx = \int x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{-4}\cdot x^{-\frac{1}{6}}dx = \int x^{-\frac{7}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{7}{2}+1}}{-\frac{7}{2}+1}+C = \frac{-2}{5x^2\sqrt{x}}+C$$

$$b)\ \int 2^x e^x dx = \int (2e)^x\,dx = (2e)^x\cdot\ln(2e)+C$$

153. Calcular las siguientes integrales por descomposición: a) $\int(4cosx - 3senx)dx$ b) $\int tg^2xdx$

$$a)\ \int (4cosx-3senx)\,dx = \int 4cosx\,dx - \int 3senx\,dx = 4\int cosx\,dx - 3\int senx\,dx = 4senx+3cosx+C$$

$$b)\ \int tg^2x\,dx = \int (1+tg^2x-1)dx = \int (1+tg^2x)\,dx - \int dx = tgx - x + C$$

154. Calcula las siguientes integrales por sustitución o cambio de variables:

$$a)\ \int sen(2x)\,dx \qquad b)\ \int \frac{1}{cos^2 5x}dx \qquad c)\ \int (x^2+1)^{88}xdx$$

$$a)\ \int sen(2x)\,dx = \begin{pmatrix} t=2x \\ dt=2dx \end{pmatrix} = \int sent\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int sent\,dt = \frac{1}{2}(-cost)+C = -\frac{\cos(2x)}{2}+C$$

$$b)\ \int \frac{1}{cos^2 5x}dx = \begin{pmatrix} t=5x \\ dt=5dx \end{pmatrix} = \int \frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{5}dt = \frac{1}{5}\int \frac{1}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{5}tgt + C = \frac{1}{5}tg(5x)+C$$

$$c)\ \int (x^2+1)^{88}xdx = \begin{pmatrix} x^2+1=t \\ 2xdx=dt \end{pmatrix} = \int t^{88}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int t^{88}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{89}}{89}+C = \frac{t^{89}}{178}+C = \frac{(x^2+1)^{89}}{178}+C$$

155. Calcula las siguientes integrales de tipo logarítmico:

$$a)\ \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx \qquad b)\ \int tgx\,dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln|f(x)|+C$$

$$a)\ \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = ln|x^2+x+1|+C \qquad b)\ \int tgx\,dx = -\int \frac{-senx}{cosx}dx = -ln|cosx|+C$$

156. Calcula las siguientes integrales por partes:

$$a)\ \int xsenx\,dx \qquad b)\ \int \ln x\,dx \qquad c)\ \int x^2e^xdx$$

$$a)\ \int xsenx\,dx = \begin{pmatrix} u=x & du=dx \\ dv=senx\,dx & v=-cosx \end{pmatrix} = -xcosx + \int cosx\,dx = -xcosx+senx+C$$

$$b)\ \int \ln x\,dx = \begin{pmatrix} u=lnx & du=\frac{1}{x}dx \\ dv=dx & v=x \end{pmatrix} = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1)+C$$

$$c)\ \int x^2e^xdx = \begin{pmatrix} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=e^xdx & v=e^x \end{pmatrix} = x^2e^x - \int 2xe^xdx = \begin{pmatrix} u=2x & du=2dx \\ dv=e^xdx & v=e^x \end{pmatrix} =$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^xdx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C = (x^2-2x+2)e^x + C$$

158. Calcula las siguientes integrales de funciones racionales:

$a)\int\frac{3}{2x-1}dx\quad b)\int\frac{2}{(x+2)^2}dx\quad c)\int\frac{7x+5}{x^2+4}dx\quad d)\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx\quad e)\int\frac{2x^4+9x^3+14x^2+16x+6}{2x^3+7x^2+4x-4}dx$

$$a)\int\frac{3}{2x-1}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2}{2x-1}dx=\frac{3}{2}\ln|2x-1|+C$$

$$b)\int\frac{2}{(x+2)^2}dx=\int 2(x+2)^{-2}dx=2\frac{(x+2)^{-2+1}}{-2+1}+C=\frac{-2}{3(x+2)}+C$$

$$c)\int\frac{7x+5}{x^2+4}dx=\int\frac{7x}{x^2+4}dx+\int\frac{5}{x^2+4}dx=\frac{7}{2}\int\frac{2x}{x^2+4}dx+\frac{5}{4}\int\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx=$$

$$=\frac{7}{2}\ln(x^2+4)+\frac{5}{2}\int\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx=\frac{7}{2}\ln(x^2+4)+\frac{5}{2}arc\ tg\frac{x}{2}+C$$

$$d)\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1+3}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{3}{2}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+2\int\frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\sqrt{3}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx==\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\sqrt{3}\,arc\ tg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$e)\int\frac{2x^4+9x^3+14x^2+16x+6}{2x^3+7x^2+4x-4}dx=(I)$$

División corta:

$$\frac{(2x^4+7x^3+4x^2-4x)+(2x^3+7x^2+4x-4)+(3x^2+16x+10)}{2x^3+7x^2+4x-4}=x+1+\frac{3x^2+16x+10}{2x^3+7x^2+4x-4}$$

$$(I)=\int(x+1)dx+\int\frac{3x^2+16x+10}{2x^3+7x^2+4x-4}dx=\frac{1}{2}(x+1)^2+\int\frac{3x^2+16x+10}{2x^3+7x^2+4x-4}dx=(II)$$

$$\frac{3x^2+16x+10}{2x^3+7x^2+4x-4}=\frac{3x^2+16x+10}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)^2}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{A(x+2)^2+B(2x-1)(x+2)+C(2x-1)}{2x^3+7x^2+4x-4}\to\begin{cases}x=\frac{1}{2}\to & \frac{75}{4}=\frac{25}{4}A\to A=3\\ x=-2\to & -10=-5C\to C=2\\ x=1\to & 29=27+3B+2\to B=0\end{cases}$$

$$(II)=\frac{1}{2}(x+1)^2+\int\frac{3}{2x-1}dx+\int\frac{2}{(x+2)^2}dx=\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{3}{2}\ln|2x-1|-\frac{2}{x+2}+C$$

160. Calcula las siguientes integrales trigonométricas:

$$a)\ \int \cos^3 x\, dx \qquad b)\ \int \frac{dx}{sen^3 x} \qquad c)\ \int \sec x\, dx$$

$$a)\ \int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cdot cosx\, dx = \int (1 - sen^2 x) cosx\, dx = \int cosx\, dx - \int sen^2 x\, cosx\, dx =$$

$$= x - \frac{sen^3 x}{3} + C$$

$$b)\ \int \frac{dx}{sen^3 x} = \left(t = tg\frac{x}{2} \rightarrow \begin{matrix} senx = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2} \end{matrix} \right) = \int \frac{(1+t^2)^3}{8t^3} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{4}\int \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{t^3} dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(t + \frac{2}{t} + t^{-3} \right) dt = \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2} + 2\ln|t| - \frac{1}{2t^2} \right) + C = \frac{1}{8} tg^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln tg\frac{x}{2} - \frac{1}{8\, tg^2\frac{x}{2}} + C$$

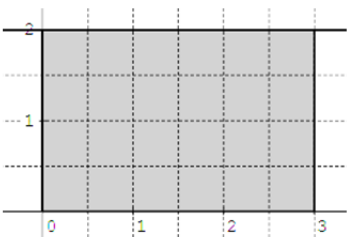
$$c)\ \int \sec x\, dx = \left(t = tg\frac{x}{2} \rightarrow \begin{matrix} \sec x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2} \\ dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2} \end{matrix} \right) = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{2}{1-t^2} dt =$$

$$= \left[\frac{2}{1-t^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} = \frac{A(1+t) + B(1-t)}{1-t^2} \rightarrow \begin{cases} t = 1 \rightarrow & 2 = 2A \rightarrow A = 1 \\ t = -1 \rightarrow & 2 = 2B \rightarrow B = 1 \end{cases} \right] =$$

$$= \int \frac{1}{1-t} dt + \int \frac{1}{1+t} dt = -\ln|1-t| + \ln|1+t| = \ln\frac{1+t}{1-t} + C = \ln\frac{1 + tg\frac{x}{2}}{1 - tg\frac{x}{2}} + C$$

161. El área del trapecio mixtilíneo que determina la función positiva y = f(x) en el intervalo [a, b], si existe, se llama integral definida entre a y b de la función f(x): $\int_a^b f(x)dx$. Explica este concepto en cada uno de los siguientes casos: $a)\ \int_0^3 2dx \quad b)\ \int_0^3 2xdx \quad c)\ \int_0^3 (2x+3)dx$

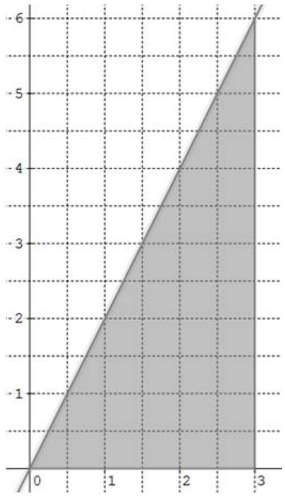
a) Área del rectángulo



$$\int_0^3 2dx = [2x]_0^3 = 2\cdot 3 - 2\cdot 0 =$$

$$= 6\, u^2$$

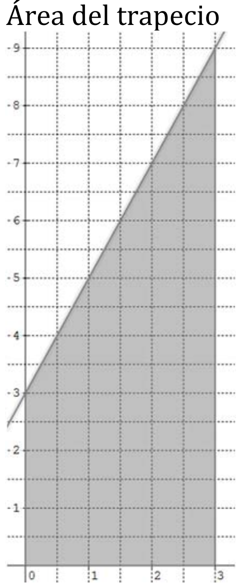
b) Área del triángulo



$$\int_0^3 2xdx = [x^2]_0^3 = 3^2 - 0^2 =$$

$$= 9\, u^2$$

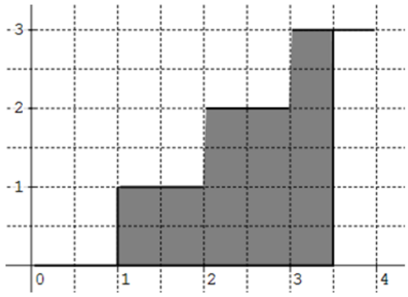
c) Área del trapecio



$$\int_0^3 (2x+3)dx = [x^2 + 3x]_0^3 =$$

$$= 3^2 + 3\cdot 3 - 0^2 - 3\cdot 0 = 18\, u^2$$

162. Calcula la integral definida de la función "parte entera de x" entre x = 1 y x = 3.5.



La integral definida es el área bajo la curva. Por tanto:

$$\int_1^{3.5} E(x)\,dx = 4.5\,u^2$$

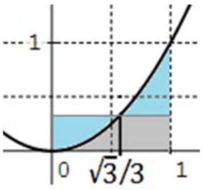
163. Calcula la integral definida de la función y = –E(x) entre x = 1 y x = 3.5.

$$\int_1^{3.5} [-E(x)]\,dx = -\int_1^{3.5} E(x)\,dx = -4.5\,u^2$$

164. Calcula el área limitada por la función $y = x^2$ entre x = 0 y x = 1.

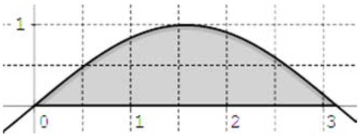
$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}\,u^2$$

165. Aplica el teorema del valor medio a la función $y = x^2$ en el intervalo [0, 1], hallando el punto c cuya existencia se afirma.



$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} = 1 \cdot c^2 \to c = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

166. Calcula el área de la región limitada por la función y = senx y el eje de abscisas entre los puntos x = 0 y x = π.



$$A = \int_0^{\pi} sen x\,dx = [-cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2\,u^2$$

167. Calcula el área limitada por la parábola $y = -x^2 + 5x - 4$ y el eje de abscisas.

$$-x^2 + 5x - 4 = 0 \leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

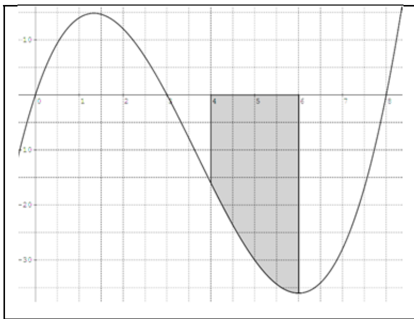
$$A = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_1^4 = \left(-\frac{4^3}{3} + \frac{5\cdot 4^2}{2} - 4\cdot 4\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{5\cdot 1^2}{2} - 4\cdot 1\right) = \frac{9}{2}\,u^2$$

168. Calcula el área limitada por el eje de abscisas y la hipérbola y = 1/x entre x = 1 y x = 4.

$$A = \int_1^4 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^4 = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4 = 2\ln 2\ u^2$$

170. Idem por la curva y = x³ – 11x² + 24x y el eje de abscisas entre x = 4 y x = 6.

Estudiamos primero los puntos de corte de la curva con el eje de abscisas para ver el signo de ‘y’:



$$x^3 - 11x^2 + 24x = x(x^2 - 11x + 24) = 0 \leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \vee x = 8$$

$$A = -\int_4^6 (x^3 - 11x^2 + 24x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{11x^3}{3} + 12x^2\right]_6^4 =$$

$$= \left(\frac{4^4}{4} - \frac{11\cdot 4^3}{3} + 12\cdot 4^2\right) - \left(\frac{6^4}{4} - \frac{11\cdot 6^3}{3} + 12\cdot 6^2\right) = \frac{172}{3}\,u^2$$

171. Idem por la curva y = x⁴ – 2x³ – 9x² + 18x y el eje de abscisas.

Estudiamos los puntos de corte con el eje de abscisas para ver los signos de la ordenada:

$$x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 18x = 0 \leftrightarrow (Ruffini) \leftrightarrow x = -3 \vee x = 0 \vee x = 2 \vee x = 3$$

Así pues, la ordenada será negativa en (–3, 0)∪(2, 3) y positiva en el resto. Por tanto:

$$A = -\int_{-3}^0 (x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 18x)dx + \int_0^2 (x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 18x)dx - \int_2^3 (x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 18x)dx$$

$$I(x) = \int (x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 18x)\,dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} - 3x^3 + 9x^2$$

$$I(-3) = \frac{729}{10} \quad I(0) = 0 \quad I(2) = \frac{52}{5} \quad I(3) = \frac{81}{10}$$

$$A = I(-3) - I(0) + I(2) - I(0) + I(2) - I(3) = \frac{729}{10} + 2\cdot\frac{52}{5} - \frac{81}{10} = \frac{856}{10} = 85.6\,u^2$$

172. Idem por las parábolas y = 6x – x² y y = x² – 2x.

Abscisas de corte de las parábolas: $6x - x^2 = x^2 - 2x \leftrightarrow 2x^2 - 8x = 0 \leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$

$$A = \int_0^4 [(6x - x^2) - (x^2 - 2x)]dx = \int_0^4 (8x - 2x^2)dx = \left[4x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{64}{3}\,u^2$$

173. Calcula el volumen del cuerpo engendrado por la función y = senx, x∈[0, π], al girar alrededor del eje de abscisas.

Dada la función $y = f(x)$, el volumen del cuerpo engendrado por un arco de la curva comprendido entre x = a y x = b al girar en torno al eje de abscisas viene dado por la fórmula:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

$$\int sen^2x\,dx = \int \left(\frac{1 - cos2x}{2}\right)dx = \frac{x}{2} - \frac{sen2x}{4} + C$$

$$V = \pi \int_0^\pi sen^2x\ dx = \pi\cdot\left[\frac{x}{2} - \frac{sen2x}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}\ u^3$$

174. Calcula el volumen del cuerpo generado al girar en torno al eje OX el recinto limitado por las parábolas y = x² e y² = x.

Es obvio que ambas parábolas se cortan en los puntos de abscisas x = 0 y x = 1.

$$V = \pi \int_0^1 \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - (x^2)^2\right]dx = \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3\pi}{10}\,u^3$$

175. Halla la longitud de la circunferencia mediante integración.

Dada la función $y = f(x)$, la longitud de un arco de la curva comprendido entre las abscisas x = a y x = b viene dado por la fórmula:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

La ecuación de la circunferencia centrada en el origen con radio $r$es: $x^2 + y^2 = r^2$.

Bastará calcular la longitud del arco correspondiente al primer cuadrante y luego multiplicarlo por 4:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \to y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \to (y')^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2} \to \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\frac{1}{4}\ell = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} dx = \left[r \cdot arc\ sen \frac{x}{r}\right]_0^r = r \cdot arc\ sen 1 - r \cdot arcsen 0 = \frac{\pi r}{2} \to$$

$$\to \ell = 4 \cdot \frac{\pi r}{2} = 2\pi r$$

176. Halla el área de la superficie de una esfera mediante integración.

Dada la función $y = f(x)$, la superficie del cuerpo engendrado por un arco de la curva comprendido entre x = a y x = b al girar en torno al eje de abscisas viene dado por la fórmula:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

Si hacemos firar un cuarto de circunferencia, obtendremos media esfera:

$$\frac{1}{2}S = 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = 2\pi r \int_0^r dx = 2\pi r \cdot x_0^r = 2\pi r(r - 0) = 2\pi r^2 \to S = 4\pi r^2$$

177. Calcula el trabajo realizado por una fuerza F al alargar un muelle hasta una longitud ℓ, sabiendo que la fuerza ejercida sobre un resorte es proporcional al alargamiento porducido (Ley de Hooke)

La Ley de Hooke dice que F = kx (donde x es el alargamiento y k una constante que depende de determinados factores inherentes a la constitución del muelle)

$$W = \int_0^\ell kx\, dx = k\left.\frac{x^2}{2}\right]_0^\ell = k\frac{\ell^2}{2}$$

178. Un objeto cae desde un avión en el instante t = 0, con una velocidad de caída vertical v = 10 + 32t m/s. A los 10 s todavía no ha llegado al suelo. ¿Qué se puede afirmar sobre la altura a la que vuela el avión?

El espacio recorrido por el objeto viene dado por:

$$s = \int_0^{10} (10 + 32t)dt = [10t + 16t^2]_0^{10} = 1700\ m$$

Por tanto, quiere decir que el avión vuela por encima de los 1700 m.